Cours d'analyse 1
Licence 1er semestre

Guy Laffaille
Christian Pauly

janvier 2006

Table des matières

Remerciements.

Merci à Thierry Mignon, Vladimir Verchinin, Julien Munier, Denis Trotabas et Daniel Maerten pour les exercices de TD.

Merci à Michele Bolognesi pour la rédaction de quelques corrigés d'exercices.

Merci à Ivan Babenko pour la preuve de l'irrationnalité du nombre d'Euler.

Chapitre 1

Les nombres réels et complexes

1.1 Nombres rationnels

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Comme chaque entier naturel n admet un successeur $n+1$, on se convainc sans peine que $\mathbb{N}$ est un ensemble infini. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Étant donné deux entiers naturels x et y on sait définir les nombres

$$x+y, x-y, x \cdot y \quad \text{et} \quad \frac{x}{y}, \text{ si } y \neq 0.$$

On remarque que l'addition et la multiplication sont des opérations qui ont leur résultat dans $\mathbb{N}$. Par contre le résultat d'une soustraction ou d'une division n'est pas toujours un entier naturel. On crée ainsi de nouveaux nombres

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

l'ensemble des entiers relatifs — on notera $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — et

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \quad \middle| \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{Z}^* \right\},$$

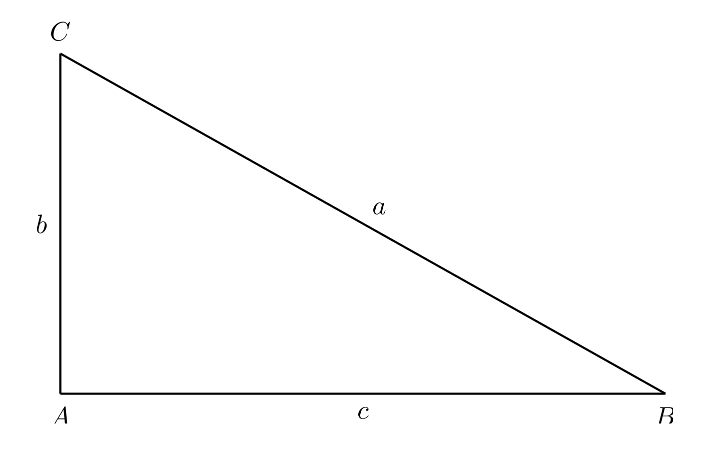
l'ensemble des nombres rationnels dans lequel on identifie la fraction $\frac{a}{b}$ avec $\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $b, n \in \mathbb{Z}^*$.

On a bien entendu les inclusions suivantes

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

et les quatre opérations élémentaires $+, -, \cdot$ et $/$ peuvent s'étendre à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Les Grecs classiques ont cru longtemps que toutes les quantités s'exprimaient par des nombres rationnels. Ils se sont aperçu que ce n'est pas toujours le cas. En effet on peut construire des nombres qui ne sont pas rationnels. Considérons par exemple un triangle ABC rectangle en A



Si on note a la longueur du segment BC, b celle de CA et c celle de AB, alors le théorème de Pythagore dit qu'on a la relation

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Ainsi on obtient que la longueur de la diagonale d'un carré de côté $b = c = 1$ est égale à $a = \sqrt{2}$.

Proposition 1.1.1 *Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.*

Démonstration. Nous allons faire une démonstration par l'absurde. [1]

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers positifs a, b tels que $\sqrt{2} = a/b$. Si a et b sont pairs, on peut simplifier la fraction a/b par 2. En simplifiant par 2 autant que possible, on arrive au cas où au moins un des deux entiers a ou b est **impair**.

En élevant au carré l'égalité $\sqrt{2} = a/b$ et en chassant le dénominateur, on arrive à

$$2b^2 = a^2.$$

Donc a^2 est pair. Si a est impair, on peut écrire $a = 2a' + 1$, alors $a^2 = 4a'^2 + 4a' + 1$ qui est impair. On en déduit donc que a est **pair**, donc on peut écrire $a = 2a'$, ce qui donne $2b^2 = 4a'^2$ et en simplifiant par 2, on obtient

$$b^2 = 2a'^2.$$

C'est la même équation que ci-dessus avec a' à la place de b et b à la place de a. Le même raisonnement montre alors que b est aussi **pair**. On a donc une contradiction et $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel. ∎

Voici d'autres exemples de nombres irrationnels.

1. Le nombre $\pi = 3,1415\ldots$ défini comme la circonférence d'un cercle de diamètre 1.
2. Le nombre d'Euler $e = 2,718\ldots$, la base de l'exponentielle, défini comme somme infinie [2]

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$$

3. Les racines carrés $\sqrt{n}$ si n est un entier qui n'est pas un carré, c'est-à-dire qui n'est pas de la forme $n = k^2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.1.2 *Le nombre d'Euler e n'est pas un nombre rationnel.*

[1] voir section 2.3.3

[2] Par définition $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

Démonstration. Comme pour $\sqrt{2}$ nous allons faire une démonstration par l'absurde. Supposons donc que e est rationnel. Il existe alors deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$e = \frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Multiplions par $b!$. Alors on obtient l'égalité

$$\frac{a}{b}b! - \left(b! + b! + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \cdots + \frac{b!}{b!}\right)$$
$$= \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \cdots + \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} + \cdots$$

Il est clair que tous les termes de la somme à gauche sont des nombres entiers, donc la somme, qu'on notera s, est aussi un entier. En utilisant la minoration

$$(b+1)(b+2)\cdots(b+n) > (b+1)^n$$

on obtient un l'encadrement suivant de s

$$0 < s < \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(b+1)^n} + \cdots .$$

Cette dernière somme infinie vaut $\frac{1}{b+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b}$ d'après la formule donnant la somme d'une série géométrique (voir (1.1)). Ainsi on obtient l'encadrement

$$0 < s < \frac{1}{b} \leq 1,$$

ce qui contredit s entier. ∎

La preuve de l'irrationalité de π et dépasse largement le cadre de ce cours. Nous renvoyons par exemple au livre "Autour du nombre π" de Pierre Eymard et Jean-Pierre Lafon.

Par contre l'irrationalité de $\sqrt{n}$ se montre de la même façon que celle de $\sqrt{2}$ (exercice).

1.2 Nombres réels

La proposition 1.1.1 dit que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est-à-dire ne peut pas s'écrire comme quotient de deux entiers. Cependant nous savons que le nombre $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous forme d'un développement décimal *infini*

$$\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$$

Dans ce cours nous prenons cette représentation décimale comme définition d'un nombre réel.

Définition 1.2.1 (nombre réel) *Un nombre réel est une collection de chiffres $\{c_0, \ldots, c_m\}$ et $\{d_1, d_2, \ldots\}$ compris entre 0 et 9. Les chiffres c_i sont en nombre fini et les chiffres d_j peuvent être en nombre infini. On fait correspondre à cette collection le nombre donné par le développement décimal*

$$x = c_m c_{m-1} \ldots c_1 c_0, d_1 d_2 d_3 \ldots d_n \ldots .$$

Exemples.

1. Les décimales du nombre π sont

$$c_0 = 3,\ d_1 = 1,\ d_2 = 4,\ d_3 = 1, \dots .$$

2. S'il n'y a qu'un nombre fini de décimales d_j non nulles, alors le réel x est un rationnel et

$$x = c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + c_1 10 + c_0 + d_1 10^{-1} + \cdots + d_n 10^{-n}$$

(x est rationnel, car c'est une somme de rationnels).

3. Un nombre rationnel admet un développement décimal, donc est réel. On a

$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots \text{ (que des 3)}$$

Théorème 1.2.1 *Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

Nous admettons ce résultat. On peut se convaincre que c'est vrai en effectuant une division de deux entiers (3/7 par exemple) et en constatant qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les restes, donc çà boucle.

Remarques.

1. Cette définition nous suffira pour ce cours mais elle n'est pas très satisfaisante. D'abord un nombre réel peut avoir deux développements décimaux distincts. Par exemple $1 = 0,9999\dots$ (toujours des 9). On peut pour s'en convaincre écrire

$$0,9999\cdots = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n}\cdots\right)$$

On voit qu'on a affaire à un progression géométrique et on peut utiliser la formule donnant la somme d'une série géométrique

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots \tag{1.1}$$

vraie pour tout réel a tel que $|a| < 1$ (ici on prend $a = \frac{1}{10}$.)

2. Cette définition fait référence au nombre 10. On peut prendre une autre base de numération, ce qui donnerait une définition équivalente d'un nombre réel.
3. Les opérations addition, multiplication,... ne sont pas si faciles que l'on pourrait le penser à cause du problème des retenues.
4. Il existe des constructions plus intrinsèques de l'ensemble des réels. Ces constructions dépassent le cadre de ce cours.
5. Il est impossible de définir rigoureusement le nombre π par son développement décimal. Il faudrait un temps et un espace infini pour calculer TOUTES les décimales de π ! Donner une valeur approchée (utilisée dans le calcul numérique) d'un nombre réel, aussi bonne qu'elle soit, n'est pas une définition au sens mathématique.

L'ensemble des réels sera noté $\mathbb{R}$ et l'on a les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

On notera très souvent $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls.

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ admet une relation d'ordre notée $\leq$. C'est la relation habituelle sur les réels.

Définition 1.2.2 (majorant, minorant, partie bornée)
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. *Le réel M est un* majorant *de A si pour tout $a \in A$ on a $a \leq M$. On dit que A est* majorée *si A a un majorant.*
2. *Le réel m est un* minorant *de A si pour tout $a \in A$, on a $m \leq a$. On dit que A est* minorée *si A a un minorant.*
3. *Si la partie A est majorée et minorée, on dit que A est* bornée.

Définition 1.2.3 (intervalle, segment)
Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$.

1. *On note $[a, b]$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$. C'est un intervalle* fermé. *On dit aussi que $[a, b]$ est un segment.*
2. *On note $]a, b[$ l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$. C'est un intervalle* ouvert.

On définit de même les intervalles mixtes ou semi-ouverts $[a, b[$ et $]a, b]$. On introduit aussi le symbole ∞ (appelé l'infini) et on note $[a, +\infty[$ l'ensemble des x réels tels que $a \leq x$ et $]-\infty, a]$ l'ensemble des réels x tels que $x \leq a$.

Exemples.
- $1, 23, \pi$ sont des majorants du segment $A = [0, 1]$. 1 est un majorant de $A = [0, 1[$.
- L'intervalle $[a, +\infty[$ n'a pas de majorant.

Théorème 1.2.2 (Propriété d'Archimède) *Soient x et y deux réels > 0, alors il existe un entier n tel que $ny > x$.*

Nous ne démontrons pas cette propriété. Elle dit qu'en faisant assez de pas de longueur y on dépasse x. D'ailleurs avec notre définition des réels la propriété d'Archimède est évidente, ce qui est loin d'être le cas quand on définit un nombre réel de manière intrinsèque.

Définition 1.2.4 (borne supérieure, borne inférieure) *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement d'un ensemble E muni d'un ordre total $\leq$). On appelle* borne supérieure *de A le minimum de l'ensemble des majorants de A et* borne inférieure *de A le maximum de l'ensemble des minorants de A.*

Avant d'énoncer le théorème d'existence de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, montrons que la borne supérieure n'existe pas toujours. On se place dans $\mathbb{Q}$ muni de l'ordre naturel.

Proposition 1.2.1 *Considérons la partie $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. Alors A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Soit M un majorant de A dans $\mathbb{Q}$. Il y en a : $2, \frac{12}{7}$ en sont. Posons

$$M' = \frac{M^2 + 2}{2M}.$$

Nous allons vérifier que M' est un autre majorant (dans $\mathbb{Q}$) et que $M' < M$, ce qui prouve qu'il n'y a pas de plus petit majorant.

Montrons que M' est un majorant : il suffit de voir que $M'^2 > 2$. On calcule

$$M'^2 - 2 = \frac{(M^2 + 2)^2}{4M^2} - 2 = \frac{M^4 - 4M^2 + 4}{4M^2} = \frac{(M^2 - 2)^2}{4M^2}$$

qui est bien strictement positif. En effet $M^2-2 \neq 0$, car sinon $\sqrt{2}$ serait rationnel (voir proposition 1.1.1).

Vérifions que $M' < M$. On calcule

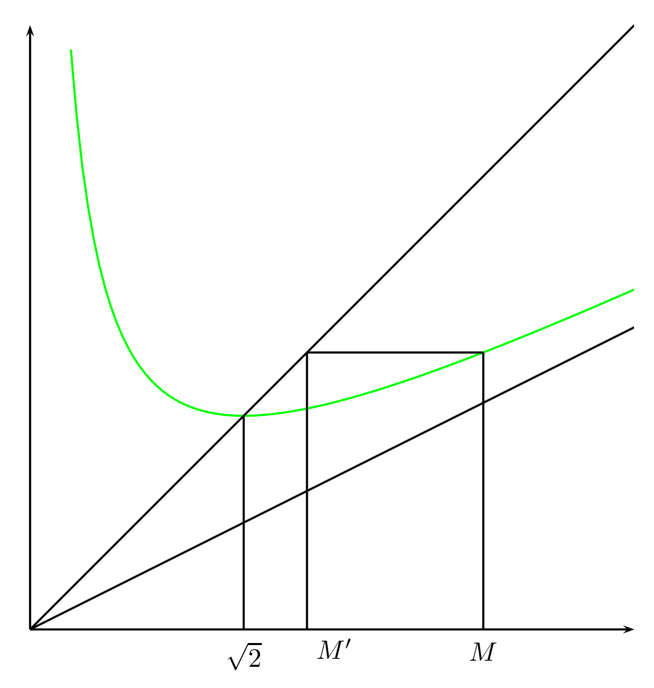
$$M - M' = M - \frac{M^2+2}{2M} = \frac{M^2-2}{2M}$$

qui est bien strictement positif puisque M est un majorant rationnel de A.

On peut aussi tracer le graphe de la fonction qui donne M' en fonction de M

$$y = \frac{x^2+2}{2x}$$

C'est une hyperbole de centre l'origine, d'asymptote $x = 0$ et $y = x/2$ qui coupe la première bissectrice au point $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ où on a une tangente horizontale. On voit alors immédiatement sur le dessin que $\sqrt{2} < M' < M$ si on a pris $M > \sqrt{2}$. ∎



Remarque.

Le choix de la fonction f qui définit $M' = f(M)$ n'est pas essentiel. Ici on a choisi $f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$, mais n'importe quelle fonction rationnelle (=quotient de deux polynômes) satisfaisant aux trois conditions (1) $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, (2) $f'(\sqrt{2}) = 0$, (3) f croissante et $f(x) \leq x$ sur l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$ aurait pu servir dans la preuve précédente. Ceci sera expliqué en détail un peu plus tard (section 4.6).

Théorème 1.2.3 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A est majorée, alors A admet une borne supérieure, notée* $\sup A$.
2. *Si A est minorée, alors A admet une borne inférieure, notée* $\inf A$.

Nous admettons ce théorème.

Exemples.

- On a $\sup[0,1] = 1$ et $\sup\,[0,1[= 1$.
- On a $\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} = \sqrt{2}$ mais comme partie de $\mathbb{Q}$ on vient de voir que cette partie n'a pas de borne supérieure.

1.3 Densité des rationnels et irrationnels

Définition 1.3.1 (densité) *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est* dense *dans $\mathbb{R}$ si A rencontre tout intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < b$.*

Théorème 1.3.1 *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Il s'agit d'exhiber un rationnel p/q tel que $a < p/q < b$.

En appliquant la propriété d'Archimède (théorème 1.2.2), on voit qu'il existe un entier q tel que

$$\frac{1}{b-a} < q$$

(on prend $y = 1$ et $x = 1/(b - a)$). On obtient

$$qa + 1 < qb. \tag{1}$$

Soit p le plus petit entier relatif tel que $p > qa$. On a alors

$$p - 1 \leq qa < p, \tag{2}$$

donc $p \leq qa + 1$ et $qa < p \leq qa + 1 < qb$. En divisant par q on a le résultat désiré. ∎

Théorème 1.3.2 *L'ensemble des nombres irrationnels noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit i un nombre irrationnel, par exemple $\sqrt{2}$.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On applique le théorème précédent à $]a - i, b - i[$: il existe un rationnel r tel que $a - i < r < b - i$. Alors $a < i + r < b$. Le nombre $x = i + r$ est irrationnel, sinon $i = x - r$ serait rationnel contrairement à l'hypothèse. Le théorème est donc démontré. ∎

Remarque.

Il y a beaucoup plus de nombres réels que de nombres rationnels. On peut montrer que les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ peuvent être mis en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que l'on peut numéroter avec les entiers naturels les éléments de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$. On dit que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Par contre $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (théorème de Cantor) et pourtant $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1.4 Nombres complexes

Certains polynômes à coefficients réels, par exemple $P(x) = x^2 + 1$, n'ont pas de racines réelles. Le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ a deux racines

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est ≥ 0. Si $\Delta < 0$, il y a un problème. Grâce aux nombres complexes on peut donner un sens mathématique aux racines carrées de nombres négatifs.

Définition 1.4.1 (nombre complexe) *Un nombre complexe est un couple de nombres réels (a, b).*

On définit l'addition et la multiplication des nombres complexes par les formules

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

On note i le nombre complexe $(0, 1)$. La formule du produit donne $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. En identifiant le réel a avec le nombre complexe $(a, 0)$, l'égalité précédente s'écrit

$$i^2 = -1.$$

Ainsi i apparait comme une racine carré de -1. C'est pourquoi on écrit très souvent $i = \sqrt{-1}$. On peut alors noter de manière plus agréable $(a, b) = a + ib$ et on vérifie que la formule qui donne le produit vient du développement de

$$(a + ib)(c + id) = ac + i(bc + ad) + i^2 bd = ac - bd + i(ad + bc).$$

Si $z = a + ib$, avec a et b réels, a est appelé la partie réelle de z et b sa partie imaginaire.

Si z est un nombre complexe non nul, c'est-à-dire si a ou b est non nul, alors z a un inverse multiplicatif : il existe z' tel que $zz' = 1$.

On vérifie aussi que $z \cdot z' = z' \cdot z$ pour tout nombre complexe z et z'.

Définition 1.4.2 (conjugué, module, argument) *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec a, b réels.*

1. *Le* conjugué *de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.*
2. *Le* module *de z est le nombre réel positif $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$. On note $|z|$ le module de z.*
3. *L'*argument *de z est le nombre réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que*

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta).$$

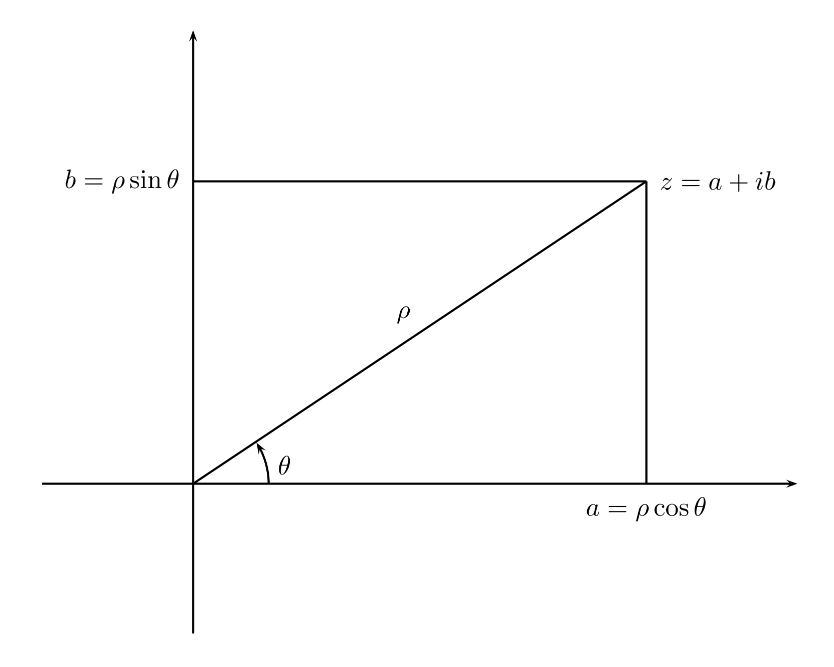
On établit sans peine les formules suivantes

- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ pour $z \neq 0$

L'ensemble des nombres complexes sera noté $\mathbb{C}$.

Interprétation géométrique : plan complexe

On associe à $z = a + ib$ avec a, b réels le point du plan de coordonnées (a, b).



Définition 1.4.3 (exponentielle) *L'exponentielle complexe est définie par*

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

Il faut évidemment donner un sens à cette somme infinie. On a alors

Théorème 1.4.1 (Formule de Moivre) *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Théorème 1.4.2 *Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ on a la formule*

$$e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}.$$

Cette formule jointe à la formule de Moivre permet de retrouver beaucoup de formules de trigonométrie.

1.5 Exercices

Exercice 1.1. Trouver des entiers naturels a, b tels que $\frac{a}{b} = 5,1736363636...$ — à partir de la troisième décimale le développement décimal est composé d'une suite infinie de nombres 36.

Exercice 1.2. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$ dire si elle est majorée, minorée, bornée. Si oui, donner sa borne supérieure et/ou inférieure :

1. $\{x \in \mathbb{R} \quad | \quad 0 < x < \sqrt{3}\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \quad | \quad 1/2 \leq \sin x < \sqrt{3}/2\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x^3 > 3\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \quad | \quad \exp(x) < 1/2\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} \quad | \quad \text{il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x = \sqrt{2}/p\}$

Exercice 1.3. Pour tout nombre réel $x \neq -1/3$, on pose

$$g(x) = \frac{2x+1}{3x+1}.$$

1. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto g(x)$.
2. On pose $g(\mathbb{N}) = \{g(0), g(1), g(2), \ldots\}$ Quel est le plus petit majorant de $g(\mathbb{N})$? de l'ensemble $g(\mathbb{Z})$?
3. Trouver le plus grand minorant de l'ensemble $g(\mathbb{N})$.
4. L'ensemble $g(\mathbb{Z})$ est-il borné ?

Exercice 1.4. Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$, avec a, b réels :

$$\frac{1}{5+3i}, \qquad \frac{3+2i}{3-2i}, \qquad \frac{1}{(4+3i)(3-2i)}.$$

Exercice 1.5. Calculer sous la forme $a + ib$, avec a, b réels, les racines carrées des nombres complexes suivants

$$1 + i\sqrt{3}, \qquad 5 + 12i, \qquad \frac{1+i}{1-i}.$$

Exercice 1.6. Calculer les racines quatrièmes de i. En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Chapitre 2

Logique et langage des ensembles

Le but de ce chapitre est de présenter les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ qui apparaîtront dans ce cours (limite d'une suite, continuité d'une fonction) et de rappeler les définitions élémentaires de la théorie des ensembles.

2.1 Propositions et opérateurs logiques

Définition 2.1.1 *Une relation (ou proposition) est une phrase affirmative qui est vraie ou fausse (V ou F en abrégé).*

Une relation porte sur des objets mathématiques comme des nombres, des fonctions, des figures géométriques,etc.

Voici quelques exemples de relations. On indique entre parenthèses la valeur de vérité (V = vrai et F= faux).

Exemples.
- $5 + 7 = 11$. (F)
- L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur (V).
- $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel (F) (voir proposition 1.1.1)

Soient R et S deux relations. On peut en former d'autres :
- la conjonction, notée (R et S).
- la disjonction, notée (R ou S). (le ou n'est pas exclusif)
- la négation, notée (non R).

Définition 2.1.2
- *L'implication* $(R \Rightarrow S)$ *est la relation (non R) ou S.*
- *L'équivalence* $(R \Leftrightarrow S)$ *est la relation* $(R \Rightarrow S)$ *et* $(S \Rightarrow R)$.

Ainsi la valeur de vérité d'une relation comme par exemple $R \Rightarrow S$ ou $R \Leftrightarrow S$ sera fonction des valeurs de vérité de R et S. La situation est décrite dans la table suivante.

R	S	R et S	R ou S	non R	$(R \Rightarrow S)$	$(R \Leftrightarrow S)$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V

Proposition 2.1.1 *On a les équivalences suivantes :*

1. *non(non R)* $\Leftrightarrow R$
2. *non (R ou S)* $\Leftrightarrow$ *(non R et (non S)*
3. *non(R et S)* $\Leftrightarrow$ *(non R) ou (non S)*
4. *R et (S ou T)* $\Leftrightarrow$ *(R et S) ou (R et T)*
5. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow$ *(non* $Q \Rightarrow$ *non P)*

Démonstration. Il suffit d'écrire la table des vérités pour chacune des relations. Traitons le dernier cas. La relation $(P \Rightarrow Q)$ est par définition la relation ((non P) ou Q) qui équivaut à (Q ou (non P)) qui par définition est la relation (non $Q \Rightarrow$ non P). ∎

Très souvent une relation fait intervenir des paramètres ou variables et la valeur V ou F de la relation peut dépendre de ces paramètres. Soit par exemple $R(x)$ la relation "$x^2 - 2 \geq 0$" où x est un paramètre réel. Alors $R(x)$ est vraie pour $x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right]$ ou $x \in \left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ et $R(x)$ est fausse pour $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$.

Il peut arriver que R fasse intervenir plusieurs variables $(x, y, z, a_1, a_2, \dots)$.

2.2 Quantificateurs

Nous avons vu plusieurs procédés logiques pour former de nouvelles relations. Dans la pratique, on a besoin d'un autre procédé qui exprime l'assertion qu'étant données une relation R et une variable x qui intervient dans R il existe au moins un objet mathématique A pour lequel la relation obtenue en remplaçant x par A est vraie, autrement dit A vérifie R. On introduit pour cela le *quantificateur existentiel*, noté par le symbole

$$\exists.$$

La relation $(\exists x)R(x)$ se lit "il existe x qui vérifie R".

Exemples.

$$(\exists x)((x \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (x^4 + 1 = 0)) \qquad (F)$$
$$(\exists x)((x \in \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad (x^4 + 1 = 0)) \qquad (V)$$

À partir du symbole $\exists$ on introduit le *quantificateur universel* noté

$$\forall.$$

Si R est une relation et x une variable, on note $(\forall x)R(x)$ la relation

$$\text{non}((\exists x)(\text{non } R(x)))$$

La relation $(\forall x)R(x)$ se lit "pour tout x on a $R(x)$". Ainsi la négation de $(\forall x)R(x)$ est $(\exists x)$ (non $R(x)$), c'est-à-dire on a l'équivalence

$$\text{non}((\forall x)R(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\text{non} R(x)).$$

De même on a l'équivalence

$$\text{non}((\exists x)R(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\text{non} R(x)).$$

Exemple.

La négation de “tous les hommes sont mortels” est “il existe un homme immortel”.

Il convient de prendre garde à l'ordre des quantificateurs : en général on ne peut pas les échanger.

Exemples.

- $\forall x, x \in \mathbb{R}, \exists y, y \in \mathbb{R}, x < y$ qui est vraie : étant donné un réel x on peut toujours trouver un autre réel y qui est plus grand.
- $\exists y, y \in \mathbb{R}, \forall x, x \in \mathbb{R}, x < y$ qui est fausse : l'élément y serait plus grand que tous les réels.

Il faut savoir qu'en mathématiques il y a beaucoup d'abus de langage. Sans eux, on ne pourrait rien faire, mais le débutant risque d'être perdu. Ainsi on écrit presque toujours $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ au lieu de

$$\forall x (x \in \mathbb{R} \Rightarrow (\exists y (y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x < y)))$$

On se ramène systématiquement à une écriture plus correcte en remplaçant $\forall x \in E \ldots$ par $\forall x (x \in E \Rightarrow \ldots)$ et $\exists x \in E \ldots$ par $\exists x (x \in E \quad \text{et} \quad \ldots)$.

2.3 Techniques de démonstration

2.3.1 Récurrence

Cette technique repose sur le fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément. Soit $R(n)$ une propriété dépendant d'un entier n. On suppose que

1. la relation $R(0)$ est vraie,
2. la relation $R(n) \Rightarrow R(n+1)$ est vraie.

On en déduit alors que

$R(n)$ est vraie pour tout n.

En effet si A, l'ensemble des entiers n pour lesquels pour lesquels $R(n)$ est fausse, n'est pas vide, il a un plus petit élément qu'on note p. Mais alors $p-1$ n'est pas dans A donc $R(p-1)$ est vraie et par suite $R(p-1+1) = R(p)$ est vraie (à cause de l'hypothèse (2)).

Exemple.

Soit $R(n)$ la relation “$2^n + 1$ est divisible par 3”. Il s'agit de montrer que $R(n)$ est vraie pour tout entier n impair. Pour $n = 1$, on a $2^1 + 1 = 3$. Supposons $R(n)$ vraie avec n impair, c'est-à-dire que l'on peut écrire $2^n + 1 = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $2^n = 3k - 1$. L'entier impair suivant est $n + 2$. On a $2^{n+2} = 4.2^n = 4(3k-1) = 12k - 4 = 3(4k-1) - 1$, d'où $2^{n+2} + 1 = 3(4k-1)$. C'est $R(n+2)$. La propriété est donc démontrée.

Le lecteur précautionneux expliquera pourquoi dans cet exemple on considère $R(1)$ et $R(n+2)$ au lieu de $R(0)$ et $R(n+1)$.

2.3.2 Contraposée

C'est l'équivalence déjà vue :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$$

Exemple.
Un entier est premier s'il n'est divisible que par 1 et lui-même. On veut montrer que si $2^n + 1$ est premier alors n est pair. Ici non Q est "n est impair", on vient de voir qu'alors $2^n + 1$ est divisible par 3, donc n'est pas premier, c'est non P, c'est-à-dire $P \Rightarrow Q$ où P est la relation "2^n+1 est premier" et Q est la relation "n est pair".

2.3.3 Démonstration par l'absurde

On veut montrer que R est vraie. Pour cela on suppose que R est fausse. D'autre part supposons que l'on déduit à partir de cette hypothèse, c'est-à-dire (non$R$) vraie, une propriété S et que l'on sait que S est fausse. En termes formels cela veut dire que

$$(\text{non}R) \Rightarrow S \;\text{ vraie} \qquad \text{et} \;\; S \;\text{ fausse.}$$

Ainsi la seule ligne de la table des vérités

R	S	$R \Rightarrow S$	non R	non $R \Rightarrow S$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	F

ayant ces valeurs de vérités (c'est-à-dire S fausse et (non$R$) $\Rightarrow S$ vraie) est la deuxième. Donc R est vraie.

En d'autres termes si on arrive à déduire un résultat faux S à partir de la négation de R, alors R est vraie.

Exemple.
On a montré par cette méthode dans le premier chapitre que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel (proposition 1.1.1). Dans cet exemple on avait considéré les deux relations
- R : $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- S : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ et a ou b impair.

et montré que (non$R \Rightarrow S$) est vraie et S est fausse.

2.4 Langage des ensembles

Un ensemble E est une collection d'objets (au sens naïf) appelés éléments.

Exemples.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des ensembles.
- Les fonctions continues de l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles forment un ensemble.
- Les parties d'un ensemble E forme un autre ensemble $P(E)$, dont les éléments peuvent être vus aussi comme des ensembles d'éléments de E.

Si x est un élément de E, on note $x \in E$, qu'on lit x appartient à E. La négation est $x \notin E$.

Définition 2.4.1 (inclusion) *Soient E et F deux ensembles. On dit que E est contenu dans F, ou que F contient E, si tout élément de E appartient à F. On note $E \subset F$.*

2.5 Exercices

Exercice 2.1. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la somme de n termes

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

1. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4.
2. Proposer une formule en n pour S_n.
3. Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 2.2. Démontrer par récurrence que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2.3. Soient E l'ensemble des réels x qui s'écrivent sous la forme $x = p + q\sqrt{2}$ avec p et q des entiers relatifs et $u = \sqrt{2} - 1$.

1. Est-ce que $\mathbb{Z} \subset E$?
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $v \in E$ on a $nv \in E$.
3. Montrer par récurrence que l'on a $u^n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer l'intersection $E \cap \mathbb{Q}$. (on se souviendra que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel)

Exercice 2.4. Pour quelles valeurs du nombre réel x la proposition

$$(2x^2 + 5x - 12 < 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 3x + 2 > 0)$$

est-elle vraie ?

Exercice 2.5. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse en faisant une démonstration.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x = |x| \quad \text{ou} \quad x = -|x|)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R},\ x = |x|) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in \mathbb{R},\ x = -|x|)$.
3. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ y - x + x^2 < 0$.
4. $\exists y \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Z},\ y - x + x^2 < 0$.
5. $\exists y \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Z},\ y - x + x^2 > 0$.

Chapitre 3

Suites réelles et complexes

3.1 Limite d'une suite réelle

Définition 3.1.1 *Un suite réelle est une famille à valeurs dans $\mathbb{R}$ indexée par les entiers naturels. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n).*

Parfois on prend comme ensemble d'indices les entiers naturels non nuls $\mathbb{N}^*$.

Exemples.

1. $u_n = \sin n$, $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$, $u_n = e^n$.
2. Suites récurrentes.
   (a) La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = u_1 = 1$ et
   $$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$
   Elle est liée au nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et apparaît dans le best seller actuel "Da Vinci code".
   (b) Plus généralement on a les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 définies par la formule
   $$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$$
   avec u_0 et u_1 donnés.
   (c) Suites arithmétiques $u_{n+1} = u_n + a$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé. Une récurrence facile montre que pour tout n on a $u_n = na + u_0$.
   (d) Suites géométriques $u_{n+1} = au_n$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé. On montre par récurrence que pour tout n on a $u_n = a^n u_0$.
3. Plus généralement $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction, par exemple $f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$ comme dans la preuve de la proposition 1.2.1
4. Plus "bizarre".
   (a) $u_n = n$-ième décimale de π.
   (b) $u_n = 0$ si n premier et $u_n = 1$ sinon.

Définition 3.1.2 *Soit (u_n) une suite réel. On dit que (u_n) est*
- majorée *s'il existe un réel K tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq K$.*
- minorée *s'il existe un réel k tel que pour tout n on a $k \leq u_n$.*
- bornée *si elle est majorée et minorée.*

- croissante *si pour tout* n *on a* $u_{n+1} \geq u_n$.
- strictement croissante *si pour tout* n *on a* $u_{n+1} > u_n$.
- monotone *si elle est croissante ou décroissante.*
- périodique *s'il existe un entier* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* n *on a* $u_{n+p} = u_n$. *L'entier* p *est la période de la suite.*

On définit de même une suite décroissante, strictement décroissante.

Il arrive qu'une propriété ne soit pas vraie pour tous les premiers termes d'une suite mais seulement à partir d'un certain rang. Par exemple, (u_n) est croissante à partir d'un certain rang s'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemples.

1. $u_n = \sin n$ est majorée.
2. $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ est strictement décroissante et bornée.
3. $u_n = e^n$ est croissante, minorée mais pas majorée.
4. On suppose que $u_0 > 0$ et $a > 0$, la suite géométrique $u_n = a^n u_0$ est croissante non majorée si $a > 1$, décroissante et bornée si $a < 1$, constante si $a = 1$.
5. La suite $u_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$ est périodique de période 17.

Proposition 3.1.1 *La suite* (u_n) *est bornée si et seulement si la suite* $(|u_n|)$ *est majorée.*

Démonstration. Supposons la suite (u_n) bornée, elle est donc majorée. Par définition il existe $K > 0$ tel que pour tout n on a $u_n \leq K$. Elle est aussi minorée, donc il existe $L < 0$ tel que pour tout n on a $L \leq u_n$. Soit $M = \max(K, -L)$. Alors pour tout n, on a $-M \leq L \leq u_n \leq K \leq M$, ce qui est équivalent à $|u_n| \leq M$.

Réciproquement supposons que la suite $(|u_n|)$ est majorée. On a un réel M tel que pour tout n on a $|u_n| \leq M$ qui est équivalent à $-M \leq u_n \leq M$. Alors M est un majorant et $-M$ est un minorant de la suite (u_n). ∎

Définition 3.1.3 (limite d'une suite) *On dit qu'une suite* (u_n) *admet le réel* ℓ *pour* limite *ou que* (u_n) converge *vers* ℓ *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \text{ on a } |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit qu'une suite (u_n) *tend vers* $+\infty$ *si*

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a } u_n \geq K.$$

On dit qu'une suite (u_n) *diverge si elle ne converge pas, c'est-à-dire si elle n'admet pas de limite dans* $\mathbb{R}$.

On note suivant les cas

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Remarques.

1. En particulier une suite qui tend vers $+\infty$ diverge.
2. On définit de même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples.

1. La suite constante $u_n = a$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé converge vers a. Choisissons un $\varepsilon > 0$. Il faut trouver un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - a| < \varepsilon$. Comme $|u_n - a| = 0$ cette inégalité est toujours vraie et il suffit de prendre $N = 0$.

2. La suite définie par $u_n = n$ tend vers $+\infty$. Il faut montrer que pour tout $K \in \mathbb{R}$ il existe un entier N tel que pour tout n tel que $n \geq N$ on a $u_n \geq K$. Il suffit de prendre pour N le plus petit entier $\geq K$.

3.2 Propriétés de la limite

Théorème 3.2.1 *Si une suite (u_n) de réels admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors cette limite est unique.*

Démonstration. Par l'absurde. Supposons qu'il y a deux limites ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$. Prenons $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{2} > 0$. Comme ℓ est limite de la suite (u_n) il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$, de même comme ℓ' est limite on a un entier N' tel que pour tout $n \geq N'$ on a $|u_n - \ell'| < \varepsilon$. Alors si $n \geq \max(N, N')$ on peut écrire en utilisant l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue :

$$\ell' - \ell = |\ell' - \ell| \leq |\ell' - u_n| + |u_n - \ell| < \varepsilon + \varepsilon = \ell' - \ell,$$

ce qui est absurde. ∎

Proposition 3.2.1 *Si une suite (u_n) de réels converge, alors elle est bornée.*

Démonstration. Commençons par le cas particulier où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Par définition on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \ |u_n - 0| < \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \leq 1$. Soit $K = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1\}$, on a alors $|u_n| \leq K$ pour tout n, donc (u_n) est bornée.

Dans le cas général, on pose $v_n = u_n - \ell$ si ℓ est la limite de (u_n). Alors (v_n) a pour limite 0, donc d'après le cas particulier la suite (v_n) est bornée : il existe M et m tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout n. Alors $m + \ell \leq u_n \leq M + \ell$, ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée. ∎

Remarque.

La réciproque est fausse. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée et diverge (pour une preuve de la divergence voir la remarque suivant la proposition 3.2.9).

Proposition 3.2.2 *Si (u_n) est une suite bornée et si (v_n) est une suite qui converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.*

Démonstration. Comme (u_n) est bornée, la suite $(|u_n|)$ est majorée (proposition 3.1.1). Donc il existe un réel K tel que $|u_n| \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme (v_n) converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| < \varepsilon/K$ pour tout $n \geq N$. Alors $|u_n v_n| = |u_n|.|v_n| < K.\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. ∎

Proposition 3.2.3 (suite "somme") *Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant comme limites respectives les réels ℓ et ℓ'. Alors la suite "somme" (w_n), définie par*

$$w_n = u_n + v_n,$$

tend vers $\ell + \ell'$.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. On écrit la convergence de (u_n) avec $\frac{\varepsilon}{2}$: il existe un N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même la convergence de (v_n) donne un M tel que si $n \geq M$ alors $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

On en déduit que pour $n \geq K = \max(M, N)$ on a $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|w_n - (\ell + \ell')| = |u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve que (w_n) tend vers $l + l'$. ∎

Remarque.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

Par contre si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, on a une forme indéterminée qui nécessite une étude plus approfondie pour conclure.

Proposition 3.2.4 (suite "produit") *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles admettant les nombres réels ℓ et ℓ' comme limites. Alors la suite "produit" (w_n) définie par*

$$w_n = u_n v_n$$

tend vers $\ell \cdot \ell'$.

Démonstration. Montrons que la suite (ℓv_n) tend vers $\ell\ell'$. En effet, la suite constante ℓ est bornée et la suite $(v_n - \ell')$ tend vers 0. D'après la proposition 3.2.2 la suite $\ell(v_n - \ell')$ converge vers 0. Donc la suite (ℓv_n) tend vers $\ell\ell'$.

De même, la suite (u_n) tend vers ℓ, donc la suite $(u_n - \ell)$ tend vers 0. La suite (v_n) est convergente donc bornée, donc la suite $v_n(u_n - \ell)$ converge vers 0, à nouveau à cause de la proposition 3.2.2. En écrivant $u_n v_n = (u_n v_n - \ell v_n) + \ell v_n = v_n(u_n - \ell) + \ell v_n$, on voit que la suite $(u_n v_n)$ tend vers $\ell\ell'$. ∎

Proposition 3.2.5 (suite des inverses) *Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Si (u_n) tend vers $\ell > 0$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. Comme (u_n) a pour limite ℓ qui est strictement positif, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$. On a donc $u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$. On en déduit que $\frac{1}{u_n} < \frac{2}{\ell}$ pour $n \leq N$, donc (u_n) est majorée, donc bornée puisqu'elle est minorée par 0.

Ainsi la suite $(\frac{1}{u_n}(u_n - \ell))$ est le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0, c'est donc une suite qui tend vers 0 (proposition 3.2.2).

Comme $\frac{1}{u_n}(u_n - \ell) = 1 - \frac{\ell}{u_n}$, on en déduit que la suite $\frac{\ell}{u_n}$ tend vers 1. Comme $\frac{1}{u_n} = (\frac{1}{\ell})(\frac{\ell}{u_n})$, d'après la limite d'un produit on a que la suite $(\frac{1}{u_n})$ tend vers $\frac{1}{\ell}$. ∎

Proposition 3.2.6 *Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.*

a) *Si u_n tend vers $+\infty$, alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0.*

b) *Si u_n tend vers 0, alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers $+\infty$.*

Démonstration. a) Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Donc $0 < \frac{1}{u_n} < \varepsilon$ ce qui prouve que $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0.

b) Fixons $K \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ pour tout n, on sait qu'il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $0 < u_n < \frac{1}{K}$. Donc $u_n > K$, ce qui prouve que u_n tend vers $+\infty$. ∎

Remarque.

La condition $u_n > 0$ est essentielle. Par exemple, si $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, la suite (u_n) tend vers 0 mais la suite $(\frac{1}{u_n})$ n'a pas de limite.

Proposition 3.2.7 (passage à la limite des inégalités)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. On suppose que

$$u_n \leq v_n$$

à partir d'un certain rang. Alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration. Par l'absurde. Supposons que $\ell > \ell'$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ vérifiant l'inégalité $\varepsilon < \frac{\ell-\ell'}{2}$.

La convergence de (u_n) vers ℓ dit qu'il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors

$$|u_n - \ell| < \varepsilon. \tag{1}$$

La convergence de (v_n) vers ℓ' dit qu'il existe un entier N' tel que si $n \geq N'$ alors

$$|v_n - \ell'| < \varepsilon. \tag{2}$$

Enfin il existe M tel que si $n \geq M$ alors

$$u_n \leq v_n. \tag{3}$$

Donc pour $n \geq \max(N, N', M)$ les trois inégalités sont vraies. On en déduit que

$$v_n < \ell' + \varepsilon < \ell - \varepsilon < u_n.$$

Remarquons que la deuxième inégalité est équivalente à $\varepsilon < \frac{\ell-\ell'}{2}$. Ceci donne une contradiction avec (3). ∎

Remarque.

La proposition n'est plus vraie si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. Prenons par exemple $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Alors pour tout $n \geq 1$ on a $u_n < v_n$, mais les deux suites ont la même limite 0.

Proposition 3.2.8 (théorème des gendarmes)

a) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang on ait les inégalités*

$$u_n \leq x_n \leq v_n.$$

Alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

b) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $v_n \geq u_n$ à partir d'un certain rang. Alors (v_n) tend vers $+\infty$.*

c) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang. Alors (v_n) tend vers $-\infty$.*

Démonstration. a) Fixons $\varepsilon > 0$. La convergence de (u_n) vers ℓ dit qu'il existe un N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon.$$

La convergence de (v_n) vers ℓ dit qu'il existe un N' tel que si $n \geq N$ alors $|v_n - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon.$$

Il existe aussi M tel que si $n \geq M$ alors $u_n \leq x_n \leq v_n$. Donc si $n \geq \max(N, N', M)$ on a

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq x_n \leq v_n < \ell + \varepsilon.$$

On déduit que $|x_n - \ell| < \varepsilon$, ce qui prouve que la suite (x_n) tend vers ℓ.

b) Par définition $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ signifie que pour un réel K donné il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $u_n \geq K$. D'autre part on sait qu'il existe un entier M tel que si $n \geq M$ alors $u_n \leq v_n$. Donc si $n \geq \max(M, N)$ on a $v_n \geq u_n \geq K$, ce qui prouve que v_n tend vers $+\infty$.

c) On fait de même. ∎

Définition 3.2.1 (sous-suite) *Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (v_n) est une* sous-suite *ou une* suite extraite *de (u_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout n on a*

$$v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemples.

1. Prenons la suite définie par $u_n = (-1)^n$. L'application $\varphi : n \mapsto 2n$ donne la sous-suite $v_n = u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$. Cette sous-suite est une suite constante. De même $\varphi : n \mapsto 2n + 1$ donne la sous-suite $v_n = u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$. Cette sous-suite est aussi une suite constante.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$. Elle est périodique de période 17. L'application $\varphi : n \mapsto 17n$ donne la sous-suite $v_n = u_{17n} = \sin(2\pi n) = 0$. L'application $\varphi : n \mapsto 17n + 1$ donne $v_n = u_{17n+1} = \sin(\frac{2\pi}{17}) \neq 0$.

Proposition 3.2.9 *Soit (u_n) une suite. Alors (u_n) tend vers ℓ si et seulement si toute sous-suite de (u_n) tend vers ℓ.*

Démonstration. $\Leftarrow$ C'est évident puisque la sous-suite (v_n) obtenue en prenant pour φ l'identité de $\mathbb{N}$ est la suite (u_n) elle-même.

$\Rightarrow$ Soit (v_n) la sous-suite associée à l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Montrons d'abord que pour tout n on a l'inégalité

$$\varphi(n) \geq n.$$

On procède par récurrence. On a $\varphi(0) \geq 0$ puisque $\varphi(0) \in \mathbb{N}$. Supposons que $\varphi(n) \geq n$. On a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ puisque φ est strictement croissante. Donc $\varphi(n+1) > n$, soit $\varphi(n+1) \geq n+1$ puisque $\varphi(n+1)$ est un entier.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite (u_n) tend vers ℓ, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Comme $\varphi(n) \geq n$, on a $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$ pour $n \geq N$, ce qui prouve que (v_n) tend vers ℓ. ∎

Remarque.

On utilise cette proposition pour montrer qu'une suite diverge : si l'on trouve deux sous-suites de (u_n) qui tendent vers deux limites distinctes alors (u_n) diverge.

Exemples.

Si $u_n = (-1)^n$, on a trouvé deux sous-suites constantes égales à 1 et -1. Donc (u_n) diverge.

La suite définie par $u_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$ diverge car on a trouvé deux sous-suites (constantes) ayant pour limite 0 et $\sin(\frac{2\pi}{17})$.

Proposition 3.2.10 *Une suite réelle qui est croissante et majorée converge vers* $\ell = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration. La partie A de $\mathbb{R}$ formée des u_n pour $n \in \mathbb{N}$ est non vide et majorée. On a admis au chapitre 1 qu'une telle partie a une borne supérieure (théorème 1.2.3). Soit ℓ cette borne supérieure, c'est un majorant de A et c'est le plus petit des majorants de A.

Puisque ℓ est un majorant on a $u_n \leq \ell$ pour tout n.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme ℓ est le plus petit majorant le nombre $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, donc il existe un élément u_N de A tel que $\ell - \varepsilon < u_N$. Comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_N$ pour $n \geq N$. On a donc pour $n \geq N$:

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon.$$

On a donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. ∎

De même on a

Proposition 3.2.11 *Une suite de réels qui est décroissante et minorée converge vers* $\ell = \inf\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 3.2.12 *Une suite (u_n) de réels qui est croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*

Démonstration. L'assertion "(u_n) est majorée" s'écrit

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq K$$

en français : il existe un majorant K de la suite (u_n)

La négation de cette assertion est

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad u_n > K$$

en français : quel que soit K le nombre K n'est pas un majorant de la suite (u_n). Changeons de notations en échangeant les rôles de n et N :

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad u_N > K$$

Comme (u_n) est croissante on a alors $u_n \geq u_N > K$ pour tout $n \geq N$, c'est la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. ∎

De même on a

Proposition 3.2.13 *Une suite (u_n) de réels qui est décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.*

3.3 Suites adjacentes

Proposition 3.3.1 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que*

1. *(u_n) est croissante,*
2. *(v_n) est décroissante,*
3. *la suite $(v_n - u_n)$ tend vers 0.*

Alors les deux suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

Dans ce cas on dit que les deux suites sont *adjacentes.*

Démonstration. Pour tout n on a

$$u_n \leq u_{n+1} \text{ et } v_n \geq v_{n+1}$$

d'où

$$-u_n \geq -u_{n+1} \text{ et } v_n \geq v_{n+1}$$

ce qui donne par addition

$$v_n - u_n \geq v_{n+1} - u_{n+1}.$$

La suite $(v_n - u_n)$ est donc décroissante. Comme elle tend vers 0, on en déduit que $v_n - u_n \geq 0$ pour tout n, c'est-à-dire $v_n \geq u_n$.

On a alors $u_n \leq v_n \leq v_0$ puisque (v_n) est décroissante. La suite (u_n) est donc majorée et est croissante donc elle converge vers une limite ℓ.

De même la suite (v_n) est minorée par u_0 et est décroissante, donc elle converge vers une limite ℓ'.

La suite $(v_n - u_n)$ tend vers $\ell' - \ell$ qui est nul à cause de l'hypothèse (3). Donc on a bien $\ell' = \ell$. ∎

Exemple.(suites arithmético-géométriques)

Soient u_0 et v_0 deux réels avec $v_0 > u_0 > 0$. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par les formules

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

On vérifie que ces deux suites sont adjacentes. Pour établir la condition (3) on peut montrer que

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

Théorème 3.3.1 (Bolzano-Weierstrass) *Soit (u_n) une suite bornée, alors il existe une sous-suite de (u_n) convergente.*

Démonstration. Soit $[a, b]$ avec $a < b$ un intervalle qui contient les termes de la suite (u_n). On procède par dichotomie, c'est-à-dire que l'on va couper l'intervalle $[a, b]$ en deux en gardant une moitié qui contient une infinité de valeurs de (u_n). Si les deux moitiés conviennent, on dit qu'on garde celle de gauche.

Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soient $[a_1, b_1]$ la moitié de $[a, b]$ que l'on garde, On a $a_0 \leq a_1$ et $b_1 \leq b_0$. On a aussi $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$.

On itère le procédé ce qui donne deux suites (a_k) et (b_k) telles que $a_k \leq a_{k+1}$ et $b_{k+1} \leq b_k$. On a aussi

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2}$$

et l'intervalle $[a_k, b_k]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).

Les deux suites (a_k) et (b_k) sont donc adjacentes. Donc elle convergent vers la même limite ℓ (proposition 3.3.1).

On construit alors une sous-suite (v_n) de (u_n). On prend pour $v_0 = u_0$. On choisit pour v_1 un des (u_n) qui est dans $[a_1, b_1]$. On suppose que l'on a choisi v_k où $v_k = u_{\varphi(k)}$. On choisit alors pour v_{k+1} un des termes de (u_n) qui est dans $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ de sorte que $\varphi(k+1) > \varphi(k)$, cette condition n'enlève qu'un nombre fini de possibilités, comme il y en a une infinité par construction ce n'est pas gênant.

On a alors $a_n \leq v_n \leq b_n$ et par le théorème des gendarmes la suite (v_n) tend aussi vers ℓ. ∎

Deuxième démonstration (plus courte). On considère le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq n \;\; u_k \geq u_n\}.$$

On distingue deux cas.

Premier cas : A est un ensemble infini. Alors la suite extraite $(u_n)_{n \in A}$ est croissante et majorée, donc converge d'après la proposition 3.2.10.

Deuxième cas : A est un ensemble fini. Alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq M$ alors $n \notin A$, ce qui est équivalent à $\forall n \geq M$ il existe un entier $k \geq n$ tel que $u_k < u_n$. Ceci permet d'extraire une sous-suite strictement décroissante de (u_n). Comme elle est minorée, elle converge (proposition 3.2.11). ∎

Remarques.

1. On a déjà vu des sous-suites convergentes dans le cas où $u_n = (-1)^n$ ou $u_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$.
2. Si on prend $u_n = \sin n$, il y a beaucoup de sous-suites convergentes : on peut montrer que pour tout $\ell \in [-1, 1]$ il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers ℓ. C'est plus difficile que dans les deux exemples précédents.

3.4 Comparaison de suites

Définition 3.4.1 (équivalent, négligeable, dominé)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'à partir d'un certain rang N on a $v_n \neq 0$.

1. *On dit que (u_n) est* équivalent *à (v_n) si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 1.*
2. *On dit que (u_n) est* négligeable *devant (v_n) si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 0.*
3. *On dit que (u_n) est* dominée *par (v_n) si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée.*

Définition 3.4.2 (Notation de Landau)

1. *Si (u_n) est équivalent à (v_n) on note $u_n \sim v_n$.*
2. *Si (u_n) est négligeable devant (v_n) on note $u_n = o(v_n)$ (petit o).*
3. *Si (u_n) est dominée par (v_n) on note $u_n = O(v_n)$ (grand O).*

Proposition 3.4.1 *Si la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n), la suite (v_n) est équivalente à (u_n).*

Démonstration. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. À partir d'un certain rang on a $1 - \varepsilon = \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1 + \varepsilon = \frac{3}{2}$. On en déduit qu'à partir d'un certain rang $u_n \neq 0$. On sait qu'alors la suite $(\frac{v_n}{u_n})$ a pour limite l'inverse de la limite de la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ (proposition 3.2.5). Elle tend donc vers 1. ∎

Remarque.
Les trois propriétés “négligeable, équivalente, dominée” sont des propriétés à l'infini des suites : la valeur de l'entier N n'a pas d'importance.

Proposition 3.4.2 *Soient (a_n) une suite non nulle à partir d'un certain rang et (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Alors*

1. *la suite $(a_n u_n)$ est équivalente à la suite $(a_n v_n)$.*
2. *si (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang les suites $(\frac{a_n}{u_n})$ et $(\frac{a_n}{v_n})$ sont équivalentes.*

Démonstration. 1. On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Comme $\dfrac{u_n a_n}{v_n a_n} = \dfrac{u_n}{v_n}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n a_n}{v_n a_n} = 1.$$

2. On a les égalités

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{u_n}\frac{v_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\frac{u_n}{v_n})} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}} = 1,$$

ce qui prouve l'affirmation. ∎

Remarque.
Les équivalents ne s'ajoutent pas !

Exemple.
Prenons $a_n = -n$, $u_n = n$ et $v_n = n+1$.
Les deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, car la suite

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

tend vers 1.
Mais $a_n + u_n = 0$ et $a_n + v_n = 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + u_n}{a_n + v_n} = 0.$$

Proposition 3.4.3 *Soit (u_n) une suite et $\lambda \in [0, 1[$. Si à partir d'un certain rang N on a*

$$|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n| \qquad \forall n \geq N \tag{$*$}$$

alors (u_n) tend vers 0.

Démonstration. En itérant k fois l'inégalité $(*)$ on obtient

$$|u_{N+k}| \leq \lambda |u_{N+k-1}| \leq \lambda^2 |u_{N+k-2}| \leq \cdots \leq \lambda^k |u_N|$$

Donc par la proposition 3.2.7

$$\lim_{k\to+\infty} |u_{N+k}| \leq \lim_{k\to+\infty} (\lambda^k |u_N|) = (\lim_{k\to+\infty} \lambda^k)|u_N| = 0.$$

Comme $|u_{N+k}| \geq 0$, on en déduit que $\lim_{k\to+\infty} |u_{N+k}| = 0$, donc $\lim_{k\to+\infty} u_{N+k} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. ∎

Proposition 3.4.4 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives. Soit $\lambda \in [0,1[$. On suppose qu'à partir d'un certain rang N on a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda \frac{v_{n+1}}{v_n} \qquad \forall n \geq N \tag{$*$}$$

Alors (u_n) est négligeable devant (v_n).

Démonstration. En multipliant $(*)$ par $\frac{u_n}{v_{n+1}}$ qui est > 0, on obtient

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \lambda \frac{u_n}{v_n}.$$

La suite $(\frac{u_n}{v_n})$ vérifie les conditions de la proposition 3.4.3 donc $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 0, ce qui veut dire que $u_n = o(v_n)$. ∎

Proposition 3.4.5 *On considère les suites*

1. *pour $n \geq 2$, soit $u_n = (\ln n)^\beta$ avec $\beta > 0$,*
2. *pour $n \geq 1$, soit $v_n = n^\alpha$ avec $\alpha > 0$,*
3. *pour $n \geq 0$, soit $w_n = a^n$ avec $a > 1$,*
4. *pour $n \geq 0$, on pose $z_n = n!$*

Alors $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(w_n)$ et $w_n = o(z_n)$.

Démonstration. 1. Montrons d'abord que $v_n = o(w_n)$. Pour cela montrons qu'il existe $\lambda \in [0,1[$ tel que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \lambda \frac{w_{n+1}}{w_n}$$

et utilisons la proposition 3.4.4.

Un calcul simple montre que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{w_{n+1}}{w_n} = a > 1.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, il existe N tel que si $n \geq N$ on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{1+a}{2}$$

car la suite $(\frac{v_{n+1}}{v_n})$ est décroissante et

$$1 < \frac{1+a}{2} < a.$$

Prenons $\lambda = \frac{1+a}{2a}$. Alors $0 < \lambda < 1$ et pour $n \geq N$ on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{1+a}{2} = \frac{1+a}{2a} a = \lambda a = \lambda \frac{w_{n+1}}{w_n}.$$

On voit que les condition de la proposition 3.4.4 sont satisfaites et donc on conclut que $v_n = o(w_n)$.

2. Montrons que $u_n = o(v_n)$. Il suffit de prouver

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0.$$

Or

$$\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\ln n}{n^\gamma}\right)^\beta,$$

où l'on a posé $\gamma = \alpha/\beta$. On verra au chapitre 4 (proposition 4.2.3) l'égalité suivante

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n^\gamma}\right)^\beta = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^\gamma}\right)^\beta.$$

De plus on remarque que

$$\frac{\ln n}{n^\gamma} = \frac{1}{\gamma}\frac{\ln(n^\gamma)}{n^\gamma}.$$

Par conséquent il suffit de montrer

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n^\gamma)}{n^\gamma} = 0.$$

Pour cela posons $u_n = \ln(n^\gamma)$. Alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$, car

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty,$$

ce qui sera prouvé au chapitre 6.

Dans la première partie de la démonstration, posons $\alpha = 1$ et $a = e$, on obtient que la suite $(\frac{n}{e^n})$ tend vers 0.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que si $n \geq N$ on a

$$\frac{n}{e^n} < \varepsilon.$$

De plus la fonction $f(x) = \frac{x}{e^x}$ a pour dérivée $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ donc $f'(x) \leq 0$ si $x \geq 1$ et par conséquent f est décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. La décroissance de f implique que pour $u_n \geq N$

$$\frac{u_n}{e^{u_n}} \leq \frac{N}{e^N} < \varepsilon.$$

Ainsi on a prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{e^{u_n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n^\gamma)}{n^\gamma} = 0.$$

3. Montrons que $w_n = o(z_n)$.

On a

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = a \qquad \text{et} \qquad \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

Pour n assez grand on a

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = n+1 \geq 2a.$$

Donc il existe un entier N tel que si $n \geq N$ on a

$$a = \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq \frac{1}{2}\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n+1}{2}.$$

C'est la condition de la proposition 3.4.3 avec $\lambda = \frac{1}{2}$. ∎

3.5 Suites complexes

Définition 3.5.1 *Une suite complexe est une famille $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes indexée par les entiers.*

On généralise la notion de limite vue dans le cas réel au cas complexe en remplaçant la valeur absolue (d'un nombre réel) par le module (d'un nombre complexe).

Définition 3.5.2 *On dit que la suite complexe (z_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|z_n - \ell| < \varepsilon$.*

Soit (z_n) une suite complexe, en posant $z_n = x_n + iy_n$ avec x_n et y_n réels on définit deux suites réelles (x_n) et (y_n).

Proposition 3.5.1 *La suite complexe (z_n) converge si et seulement si sa partie réelle (x_n) et sa partie imaginaire (y_n) convergent.*

Démonstration. Supposons que (z_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. On écrit $\ell = a + ib$ avec a et b réels. On a l'inégalité suivante

$$|x_n - a| = \sqrt{(x_n - a)^2} \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - \ell|,$$

car $(y_n - b)^2 \geq 0$. On en déduit que la suite (x_n) tend vers a. On démontre de même que la suite (y_n) tend vers b.

Réciproquement, on suppose que la suite (x_n) converge vers $a \in \mathbb{R}$ et que la suite (y_n) converge vers $b \in \mathbb{R}$. On pose $\ell = a + ib$ et on va montrer que la suite complexe (z_n) converge vers ℓ.

En effet on a $|z_n - \ell| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$, car $|u + iv| \leq |u| + |v|$ pour tous réels u, v. Cette inégalité est équivalente à $\sqrt{u^2 + v^2} \leq |u| + |v|$, qui au carré est $u^2 + v^2 \leq u^2 + v^2 + 2|uv|$, qui est évidemment vraie.

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (x_n) tend vers a il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même il existe N' tel que si $n \geq N'$ alors $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors si $n \geq \max(N, N')$ on a $|z_n - \ell| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$. ∎

Lemme 3.5.1 (Inégalité triangulaire) *Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ on a les inégalités*

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|.$$

Démonstration. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x', y' réels. L'inégalité $|z - z'| \leq |z| + |z'|$ s'écrit

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

En élevant au carré on est ramené à montrer que

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 \leq x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}$$

ou

$$-(xx' + yy') \leq \sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}$$

En élevant encore au carré, on arrive à

$$0 \leq (xy' - x'y)^2$$

qui est vrai.

On déduit la première inégalité de la deuxième. Posons $u = x - y$. On a alors $y = x - u$ et $|u| \leq |x| + |x - u|$, d'où $|u| - |x| \leq |x - u|$. De même on a $|x| - |u| \leq |u - x| = |x - u|$, donc $||u| - |x|| \leq |x - u|$. ∎

Proposition 3.5.2 *Si la suite complexe (z_n) converge vers ℓ alors la suite réelle $(|z_n|)$ converge vers $|\ell|$.*

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire (lemme 3.5.1) on a $||z_n| - |\ell|| \leq |z_n - \ell|$. ∎

Exemple.
Soit a un nombre complexe non nul. Étudions la suite (z_n) définie par

$$z_n = a^n.$$

On distingue trois cas.

1. $|a| > 1$: la suite réelle $(|a^n|) = (|a|^n)$ tend vers $+\infty$, donc d'après la proposition précédente (z_n) diverge.
2. $|a| < 1$: la suite réelle $(|a^n|) = (|a|^n)$ tend vers 0 et (z_n) tend aussi vers 0.
3. $|a| = 1$: supposons que (z_n) converge vers ℓ. On a la relation $z_{n+1} = az_n$, donc à la limite $\ell = a\ell$. On obtient donc que $a = 1$ ou bien $\ell = 0$. Comme la suite $(|a^n|)$ est constante et égale à 1, on voit que $|\ell| = 1$. Le cas $\ell = 0$ est donc exclu. Finalement si $|a| = 1$, la suite (z_n) converge si et seulement si $a = 1$.

3.6 Exercices

Exercice 3.1. Calculer les limites des suites données par les termes généraux suivants :

$$\frac{n^3}{-3+\sin n}, \qquad \cos(\frac{1}{n}), \qquad \exp(-n^2)\cos(n^3), \qquad \frac{\sin n}{n},$$
$$\frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}, \qquad \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}, \qquad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Exercice 3.2. Montrer qu'on a pour tout réel $x \geq 0$ les inégalités suivantes

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

En déduire la limite de la suite dont le terme général est

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 3.3. On introduit les suites $u_n = \cos(\frac{2\pi n}{17})$ et $v_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Déterminer les limites, quand elles existent, des suites suivantes

$$(a)\ \ u_n \qquad (b)\ \ v_n \qquad (c)\ \ u_n \cdot v_n$$
$$(d)\ \ u_n + v_n \qquad (e)\ \ \frac{u_n}{v_n} \qquad (f)\ \ \frac{v_n}{1+u_n}$$

Indications : Pour (e) donner un minorant de la suite $|u_n|$. En déduire que la suite $\frac{|u_n|}{v_n}$ diverge. Pour (f) donner un minorant de la suite $1+u_n$. En déduire que la suite $\frac{v_n}{1+u_n}$ converge.

Exercice 3.4. Pour quels réels a non nuls la suite $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{a^n}$ a-t-elle une limite finie ?

Exercice 3.5. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique définie par la relation $u_{n+1} = au_n$. Pour quelles valeurs de a et de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Dans ces cas quelle est la limite ?

Exercice 3.6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la suite de terme général

$$u_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$

(u_n est une somme de $n+1$ termes) est-elle convergente ? Quelle est la limite ?

Exercice 3.7. a) Trouver toutes les suites périodiques convergentes.
b) Trouver toutes les suites périodiques qui tendent vers $+\infty$.

Exercice 3.8. *(Suite de Fibonacci).* On met dans un enclos un couple de lapins nouveau-nés et on suppose que la vie chez les lapins est régie par les lois suivantes :

1. Les lapins vivent tous en couple fidèle et inséparable.
2. Les lapins sont immortels.
3. A partir du deuxième anniversaire de chaque couple, ce dernier donne naissance tous les ans à un couple de lapins.

Soit u_n le nombre de couples de lapins dans l'enclos après n années. Établir la relation

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

Montrer que le terme général de la suite u_n peut s'écrire

$$u_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

avec a et b des réels à déterminer.

Exercice 3.9. Pour $n \geq 1$, on définit u_n comme la somme de n termes par la formule

$$u_n = \frac{1}{n+\ln 1} + \frac{1}{n+\ln 2} + \frac{1}{n+\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n+\ln n}.$$

Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3.10. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.
Indication : Majorer (resp. minorer) u_n par $n+1$ fois le plus grand (resp. petit) des $n+1$ termes.

Exercice 3.11. Montrer que pour tout nombre réel x, y on a l'inégalité

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Utiliser cette inégalité pour montrer que si une suite (u_n) tend vers l, alors la suite $(|u_n|)$ tend vers $|l|$. Est-ce que la réciproque est vraie ?

Exercice 3.12. On introduit la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite u_n est strictement croissante.
2. Montrer par récurrence sur l'entier k l'inégalité suivante

$$u_{2^k} \geq \frac{k}{2}$$

3. En déduire que la suite u_n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} convergent vers les limites respectives l_1 et l_2.
a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur l_1 et l_2 pour que u_n converge.
b) On suppose que la suite extraite u_{3n} converge aussi vers une limite l_3. Montrer que $l_1 = l_3$, puis $l_2 = l_3$. En déduire que u_n converge.

Exercice 3.14. *Calculs de racines carrées.* Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right), \ .$$

et on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = \frac{(u_n-\sqrt{a})}{(u_n+\sqrt{a})}$.

1. Montrer que, pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n^2$.
2. Calculer v_n en fonction de v_0 et montrer que $|v_0| < 1$. En déduire que v_n converge vers 0.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n et montrer que $\lim u_n = \sqrt{a}$.
4. Calculer les trois premiers termes de la suite, pour $u_0 = 1$ et $a = 2$.

Exercice 3.15. Soit u_n la suite définie par $u_0 = a$ et

$$u_{n+1} = \frac{1 + {u_n}^2}{2}.$$

a) Tracer le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$ et trouver les points d'intersection du graphe avec la droite d'équation $y = x$.
b) Montrer que
(i) si $|a| > 1$, alors u_n tend vers $+\infty$.
(ii) si $|a| \leq 1$, alors u_n converge vers 1.
Indication : On montrera que la suite u_n est croissante et que la seule limite possible est 1.

Exercice 3.16. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_1 = 1 \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$$

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{2^n}.$$

En déduire un majorant de u_n.

3. Montrer que la suite (u_n) converge.
4. Trouver sa limite.

Exercice 3.17. Pour chacun des énoncés suivants dire s'il est vrai ou faux. On justifiera chaque fois la réponse.

1. Une suite converge si et seulement si elle est bornée.
2. Une suite réelle croissante et majorée converge.
3. Une suite réelle non majorée tend vers $+\infty$.
4. Une suite réelle convergeant vers 1 par valeurs inférieures est croissante.
5. Une suite réelle positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
6. La suite (a_n) converge vers 0 si et seulement si la suite $(|a_n|)$ converge vers 0.
7. Soient deux suites (u_n) et (v_n) avec $v_n = u_{n+1} - u_n$. Alors (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge vers 0.

Exercice 3.18. Que peut-on dire de la somme de deux suites convergentes ? de deux suites divergentes ? d'une suite convergente et d'une suite divergente ?

Chapitre 4

Fonctions d'une variable réelle

4.1 Limite et continuité

Définition 4.1.1 *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.*
On appelle A le domaine de définition *de la fonction f.*
On dit que f est
– minorée *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $f(x) \geq m$.*
– majorée *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $f(x) \leq M$.*
– bornée *si f est majorée et minorée.*
Si f est majorée, on appelle borne supérieure *de f le nombre réel*

$$\sup_A f = \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

On définit de même la borne inférieure.
On dit que f admet un maximum *en $a \in A$ si $f(a)$ est le maximum de la partie $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.*
On dit que f admet un maximum local *en $a \in A$ s'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum de $f(A \cap I)$.*
On définit de même la notion de minimum *et de* minimum local.
Un extremum *(local) est un maximum (local) ou un minimum (local).*

Ces définitions ne sont que des généralisations des mêmes notions vues dans le cas des suites.

Remarque.
Une fonction bornée possède toujours une borne supérieure et une borne inférieure mais pas forcément un maximum et un minimum.

Exemples.

1. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors f est bornée. On a $\sup_{]0,1[} f = 1$, mais $\max_{]0,1[} f$ n'existe pas.
   On a $\inf_{]0,1[} f = 0$, mais $\min_{]0,1[} f$ n'existe pas.
2. Une fonction peut admettre un maximum en plusieurs points. Ainsi $f(x) = \sin x$ admet un maximum en les points $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans la suite on prendra comme domaine de définition A des intervalles de la forme
– $A =]x,y[$, $[x,y[$, $]x,y]$, ou $[x,y]$ avec $x < y$. On notera alors $\overline{A} = [x,y]$.
– $A =]-\infty,x]$ ou $]-\infty,x[$. On notera alors $\overline{A} =]-\infty,x]$.

– $A = [x, +\infty[$ ou $]x, +\infty[$. On notera alors $\overline{A} = [x, +\infty[$.
– $A =]-\infty, +\infty[$ alors $\overline{A} =]-\infty, +\infty[$.

On dit que $\overline{A}$ est l'adhérence de A.

On généralise la notion de limite d'une suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ à la limite d'une fonction $f(x)$ quand x tend vers a.

Définition 4.1.2 (limite d'une fonction) *Soient A un intervalle et $\overline{A}$ son adhérence. Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{A}$.*

1. *On dit que f admet ℓ comme limite en a si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

2. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si*

$$\forall K \in \mathbf{R} \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > K$$

On note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

3. *On dit que f admet ℓ comme limite quand x tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \text{ tel que } \forall x \in A, x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$.

4. *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si*

$$\forall K \quad \exists M \text{ tel que } \forall x \in A, x > M \Rightarrow f(x) > K$$

On note $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

On définit de même $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemples.

1. Soient $A =]0, 1[$, $a = 1 \in \overline{A}$ et $f(x) = x$. Alors $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.
2. Soient $A =]0, 1[$, $a = 0 \in \overline{A}$ et $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
3. Soient $A =]0, 1[$, $a = 0 \in \overline{A}$ et $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
4. Soient $A =]-\infty, +\infty[$ et $f(x) = e^{-x}$. Alors $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
5. Soient $A =]-\infty, +\infty[$ et $f(x) = x$. Alors $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Proposition 4.1.1 *Si f admet une limite en a, cette limite est unique.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle donnée pour les suites. On procède par l'absurde en supposant que f admet deux limites ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$ en a. On prend $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{2}$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $\alpha' > 0$ tel que $|x - a| < \alpha'$ implique que $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$. On a $\ell' - \ell = |\ell' - f(x) + f(x) - \ell| \leq |\ell' - f(x)| + |f(x) - \ell|$ par l'inégalité triangulaire. Si $|x - a| < \min(\alpha, \alpha')$, on obtient $\ell' - \ell < 2\frac{\ell' - \ell}{2}$, ce qui est absurde. ∎

Définition 4.1.3 (continuité) *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$. On dit que f est* continue *en a si f admet $f(a)$ comme limite en a. Autrement dit*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur *a si f est continue en tout point de a.*

Exemples.

1. Les fonctions exponentielles et trigonométriques sont continues sur leurs domaines de définition.
2. Soit $E(x)$ le plus grand entier $\leq x$. C'est la partie entière de x. On montre que la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Définition 4.1.4 (Prolongement par continuité) *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : B \to \mathbb{R}$ avec $A \subset B$. On dit que g est un* prolongement par continuité *de f si*

1. *g est un prolongement de f (c'est-à-dire que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$).*
2. *g est continue en tout point de B.*

Exemple.

Prenons $A =]0,1]$ et $B = [0,1]$. Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Alors la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

est un prolongement par continuité de f.

4.2 Propriétés de la limite d'une fonction

Les propriétés des limites de suites se généralisent facilement au cas des fonctions.

Proposition 4.2.1 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions.*

1. *Si f admet une limite ℓ en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que f soit bornée sur $A \cap I$. Si f admet une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ alors il existe un intervalle $I =]b, +\infty[$ tel que f soit bornée sur $A \cap I$.*
2. *Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et si g est bornée sur un intervalle ouvert contenant a alors $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.*
3. *Si f et g ont une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a, alors*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

et

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x))$$

4. *Si f ne s'annule pas sur A, et*
   (a) *si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$$

   (b) *si $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$, alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

   (c) *si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et si $f(x) \geq 0$ sur un intervalle ouvert contenant a, alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

5. *Si* $f(x) \le g(x)$ *sur un intervalle ouvert contenant* a *alors*
$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

6. **(gendarmes)** *Si* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *sur un intervalle ouvert contenant* a *et si* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$ *alors* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.

Démonstration. Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas des suites. Démontrons par exemple le théorème des gendarmes. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $|x-a| < \alpha$ implique $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, d'où $\ell - \varepsilon < f(x)$. De même il existe $\alpha' > 0$ tel que $|x - a| < \alpha'$ implique $|h(x) - \ell| < \varepsilon$, d'où $h(x) < \ell + \varepsilon$. Donc si $|x - a| < \min(\alpha, \alpha')$ alors $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$. ∎

Proposition 4.2.2 (Composée de deux fonctions continues) *Soient deux fonctions* $f : A \to \mathbb{R}$ *et* $g : B \to \mathbb{R}$ *avec* $f(A) \subset B$. *Si* f *est continue en* $a \in A$ *et si* g *est continue en* $b = f(a) \in B$, *alors la composée* $g \circ f$ *est continue en* a.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. On veut $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$. Comme g est continue en $b = f(a)$ il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| < \alpha$ implique $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$. Comme f est continue en a il existe $\beta > 0$ tel que $|x - a| < \beta$ implique $|f(x) - f(a)| < \alpha$. ∎

Proposition 4.2.3 (Critère séquentiel de continuité) *Soient une fonction* $f : A \to \mathbb{R}$ *et* $a \in A$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. f *est continue en* a.
2. *pour toute suite* (u_n) *à valeurs dans* A *telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ *on a* $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

Démonstration. Supposons f continue en a. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Comme (u_n) tend vers a, il existe un entier N tel que si $n \ge N$ alors $|u_n - a| < \alpha$. Mais alors $|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$. Donc la suite $(f(u_n))$ a pour limite $f(a)$.

Pour montrer la réciproque, nous allons prouver la contraposée : en supposant que f n'est pas continue en a il s'agit de trouver une suite (u_n) qui converge vers a et telle que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \ne f(a)$.

Dire que f n'est pas continue en a est la négation de $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire
$$\text{non}(\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in A \cap]a - \alpha, a + \alpha[\quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$
qui équivaut à
$$(*) \qquad \exists\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0, \exists x \in A \cap]a - \alpha, a + \alpha[\quad |f(x) - f(a)| \ge \varepsilon.$$

On a le droit de choisir α. Prenons par exemple $\alpha = \frac{1}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$. La relation $(*)$ implique alors qu'il existe $u_n \in A \cap]a - \alpha, a + \alpha[$ tel que $|f(u_n) - f(a)| \ge \varepsilon$.

Alors $|u_n - a| < \frac{1}{2^n}$, donc (u_n) tend vers a et comme $|f(u_n) - f(a)| \ge \varepsilon$ la suite $(f(u_n))$ ne tend pas vers $f(a)$. ∎

4.3 Propriétés des fonctions continues

Théorème 4.3.1 (théorème des valeurs intermédiaires)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(a) \le f(b)$. *Alors pour tout* $y \in [f(a), f(b)]$ *il existe* $x \in [a, b]$ *tel que*
$$f(x) = y.$$

Démonstration. On va définir par récurrence deux suites (a_n) et (b_n). On commence par $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Supposons a_n et b_n construits.

Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y$, on pose

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n \\ b_{n+1} &= \frac{a_n+b_n}{2}. \end{cases}$$

Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$, on pose

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} &= b_n. \end{cases}$$

On va montrer que pour tout n on a

$$(*) \qquad f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$$

Au rang $n = 0$ la relation $(*)$ équivaut à $f(a) \leq y \leq f(b)$, qui est l'hypothèse.

Supposons que $(*)$ est vraie au rang n. On distingue deux cas.

– si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y$ alors

$$f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq y \leq f(\frac{a_n+b_n}{2}) = f(b_{n+1})$$

– si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$ alors

$$f(a_{n+1}) = f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y \leq f(b_n) = f(b_{n+1})$$

D'où $(*)$ au rang $n+1$.

Par définition de a_n et de b_n on voit que $a_n \leq b_n$, que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante. Enfin on a

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = \cdots = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Donc la suite $(b_n - a_n)$ tend vers 0.

On a donc deux suites adjacentes. D'après la proposition 3.3.1 elles convergent vers la même limite. Appelons x cette limite.

Vérifions que $x \in [a, b]$. En effet on a $a = a_0 \leq a_n \leq x \leq b_n \leq b_0 = b$.

Vérifions que $f(x) = y$. Comme f est continue sur $[a, b]$, elle est continue en x et donc $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x)$. Mais par la propriété $(*)$ on a $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$. Finalement par le théorème des gendarmes (proposition 3.2.8) on obtient $f(x) = y$. ∎

Théorème 4.3.2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur un segment*[1]*. Alors f a un maximum et un minimum sur $[a, b]$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour le maximum (pour le minimum, on prend $-f$ à la place de f).

Montrons d'abord par l'absurde que f est majorée. Supposons que f n'est pas majorée. Cela implique que pour tout entier n il existe un réel $x \in [a, b]$ tel que $f(x) > n$. Appelons x_n cet élément. On a donc une suite (x_n) à valeurs dans le segment $[a, b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 3.3.1), on peut extraire une sous-suite convergente (y_n) de la suite (x_n). On obtient ainsi une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $y_n = x_{\varphi(n)}$. Donc

$$f(y_n) = f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n,$$

[1]voir définition 1.2.3

ce qui implique que la suite $(f(y_n))$ tend vers $+\infty$.

Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Comme f est continue on a $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(\ell)$, ce qui contredit $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = +\infty$. Donc f est majorée et $\sup_{[a,b]} f$ existe.

Soit M cette borne supérieure. Il suffit alors de montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = M$.

Soit n un entier. Par définition de la borne supérieure, $M - \frac{1}{2^n}$ n'est pas un majorant des valeurs de f, donc il existe $x_n \in [a,b]$ tel que

$$M - \frac{1}{2^n} < f(x_n) \leq M.$$

On a donc une suite (x_n) dans $[a,b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 3.3.1), il existe une sous-suite convergente (y_n) de (x_n) avec $y_n = x_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Soit x la limite de la suite (y_n). On a les inégalités

$$M - \frac{1}{2^n} \leq M - \frac{1}{2^{\varphi(n)}} < f(y_n) \leq M.$$

Par le théorème des gendarmes (proposition 3.2.8) on conclut que la suite $(f(y_n))$ tend vers M.

Comme f est continue, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(x)$. Finalement on obtient $f(x) = M$. ∎

4.4 Fonctions dérivables

Soient $f : A \to R$ une fonction et $a \in A$.

Définition 4.4.1 *On dit que f est* dérivable *en a si la limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (dans $\mathbb{R}$). On note $f'(a)$ cette limite.

Exemples.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On vérifie facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{|x|}{x} = 1$$

et

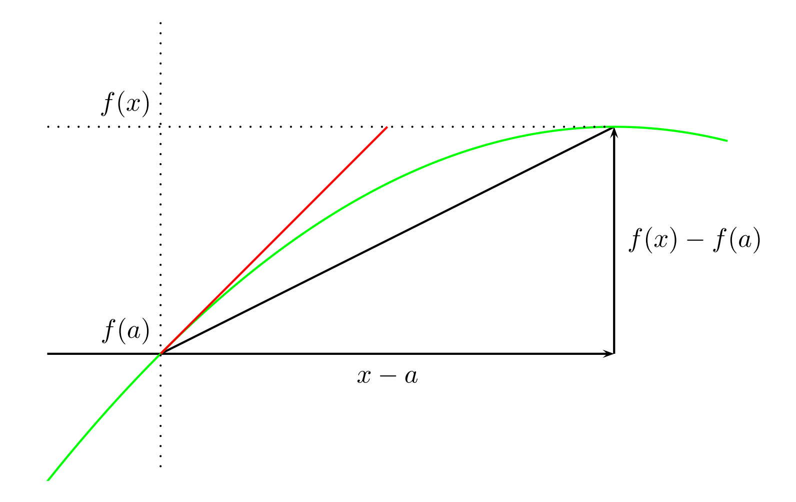
$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{|x|}{x} = -1$$

Donc f n'est pas dérivable en 0. Par contre f est dérivable en tout point $a \neq 0$.

2. Les fonctions classiques
   – trigonométriques : $\sin, \cos, \tan, \ldots$
   – polynomiales : $ax^2 + bx + c, \ldots$
   – exponentielles : e^x
   – rationnelles : $\frac{ax+b}{cx+d}, \ldots$
   sont dérivables sur leurs domaines de définition.

Interprétation géométrique.

La dérivée $f'(a)$ de f en a donne la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ au graphe de f.



Proposition 4.4.1 *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Soit $\ell = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Comme la fonction x est continue en a, on a $\lim_{x\to a}(x-a) = 0$. D'où en utilisant la propriété des limites par rapport au produit (proposition 4.2.1(3))

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right] \\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]\lim_{x\to a}(x-a) = \ell.0 = 0\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ et f est bien continue en a. ∎

Remarque.

1. La réciproque n'est pas toujours vraie, comme le prouve l'exemple $f(x) = |x|$ en $x = 0$.
2. Il existe même des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point de leur domaine de définition.

Proposition 4.4.2 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local en a. Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Supposons que l'extremum est un maximum (le cas du minimum se traite en remplaçant f par $-f$). Alors par définition il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que pour tout $x \in I \cap A$ on a $f(x) \leq f(a)$.

Si $x > a$, on a $x - a > 0$ et $f(x) - f(a) \leq 0$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ et par passage à la limite (proposition 4.2.1(5)) on obtient $f'(a) \leq 0$.

Si $x < a$, on a $x - a < 0$ et $f(x) - f(a) \leq 0$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ et par passage à la limite (proposition 4.2.1(5)) on obtient $f'(a) \geq 0$.

En combinant les deux inégalités on obtient $f'(a) = 0$. ∎

Remarque.

La réciproque n'est pas toujours vraie. Si $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local.

Définition 4.4.2 (fonction dérivée) *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de A, alors f est dérivable sur A et on définit sa fonction dérivée f' par*

$$\begin{array}{rcl} f' : A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

Proposition 4.4.3 *1. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur A, alors $f+g$ et fg sont dérivables sur A et*

$$(f+g)' = f' + g' \qquad \text{et} \qquad (fg)' = f'g + fg'.$$

2. Si f ne s'annule pas sur A, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur A et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Démonstration. 1. Le cas de l'addition résulte facilement du résultat concernant l'addition des limites.

Pour le produit, on écrit

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a)).$$

On divise par $(x-a)$ et on passe à la limite quand x tend vers a ce qui donne le résultat grâce aux propriétés des limites de produit et de sommes (proposition 4.2.1). De plus on sait que $g(x)$ tend vers $g(a)$ par la continuité de g.

2. Pour l'inverse, on écrit :

$$\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right)\frac{1}{x-a} = -\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\frac{1}{f(x)}\frac{1}{f(a)}$$

qui a un sens pour $|x-a|$ assez petit.

Quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers $f(a)$, car f est continue. On obtient alors la formule désirée. ∎

Proposition 4.4.4 (Dérivée de la composée de deux fonctions) *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$ (pour tout $x \in A$ on a $f(x) \in B$). Si f est dérivable en $a \in A$ et g est dérivable en $f(a) \in B$, alors la composée $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$$

Démonstration. (simplifiée) Soit $a \in A$. Par définition de la dérivée, on a

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a}$$

On suppose pour simplifier qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in (I \cap A) \setminus \{a\}$. On peut écrire alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)}.\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

Le premier facteur est la composée des fonctions

$$x \mapsto f(x) \text{ et } y \mapsto \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}.$$

Comme f est continue, $f(x)$ tend vers $f(a)$. Comme g est dérivable en $f(a)$, on a

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = g'(f(a)).$$

En composant, on trouve

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = g'(f(a)).$$

D'où la formule de la proposition. ∎

Proposition 4.4.5 (Dérivée de la fonction réciproque) *Soit $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une fonction réciproque $g : B \to A$, c'est-à-dire que*

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \qquad \text{et} \qquad f(g(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors g est dérivable en $f(a)$ et on a

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. On admet l'existence de $g'(f(a))$. On dérive la formule $g(f(x)) = x$. En appliquant la proposition qui donne la dérivée de la composée (proposition 4.4.4) on obtient

$$1 = (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

D'où la formule de la proposition. ∎

4.5 Propriétés des fonctions dérivables

Théorème 4.5.1 (théorème de Rolle) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Comme f est continue sur un segment, f admet un maximum et un minimum d'après le théorème 4.3.2. Soit $M = \max_{[a,b]} f$ et $m = \min_{[a,b]} f$.

Si $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(a)$ il existe un $c \in]a, b[$ tel que f possède un extremum en c. On sait alors que $f'(c) = 0$ d'après la proposition 4.4.2.

Sinon on a $m = f(a) = f(b)$ et $M = f(a) = f(b)$. Donc f est constante sur $[a, b]$ et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$. ∎

Théorème 4.5.2 (théorème des accroissements finis)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. On introduit la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. La fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème de Rolle (théorème 4.5.1), il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Comme

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

on obtient bien la formule annoncée en posant $x = c$. ∎

Proposition 4.5.1 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle A. Alors :*

1. *f est constante si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in A$.*
2. *f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in A$.*
3. *Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in A$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante).*

Démonstration.

1. Si f est constante, sa dérivée est nulle. Réciproquement, soient $a, b \in A$ avec $a < b$. On applique le théorème des accroissements finis (théorème 4.5.2) à la fonction f sur le segment $[a, b]$: il existe un $c \in]a, b[$ tel que

   $$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

   Comme f' est nulle, on obtient $f(b) = f(a)$. Par conséquent f est constante.
2. Si f est croissante, on a $f(x) \geq f(a)$ pour $x > a$ et alors $(f(x) - f(a))/(x-a) \geq 0$. De même si $x < a$, on $f(x) \leq f(a)$ et $(f(x) - f(a))/(x-a) \geq 0$. Comme les inégalités passent à la limite, en faisant tendre x vers a on voit que $f'(a) \geq 0$.

   Réciproquement, on procède comme dans la première partie : on obtient $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Donc $f(b) - f(a) \geq 0$ si $b > a$ et $f(b) - f(a) \leq 0$ si $b < a$. Donc f est croissante.

   On traite le cas f décroissante en remplaçant f par $-f$.
3. pareil que pour 2 sauf qu'on a des inégalités strictes. ∎

Remarque.

La réciproque de 3 n'est pas vraie. En effet, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante, mais sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$.

4.6 Application aux suites réelles

Théorème 4.6.1 (théorème du point fixe) *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons qu'il existe un* point fixe *$\ell \in A$ pour f, c'est-à-dire un point ℓ tel que*

$$f(\ell) = \ell,$$

et qu'il existe un intervalle $I = [\ell - a, \ell + a]$ et un réel $\lambda < 1$ tels que pour tout $x \in I$

$$|f'(x)| \leq \lambda.$$

Alors la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et la formule de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers ℓ.

Démonstration. On pose $v_n = u_n - \ell$. Il suffit de montrer que (v_n) tend vers 0.

Montrons d'abord par récurrence que $u_n \in I$ pour tout n. Par hypothèse $u_0 \in I$. Supposons $u_n \in I$. Alors si l'on applique le théorème des accroissements finis (théorème 4.5.2) à la fonction f et à l'intervalle $[u_n, \ell]$ si $u_n \leq \ell$ (ou bien $[\ell, u_n]$ si $u_n > \ell$) on obtient qu'il existe $c \in]u_n, \ell[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell} = \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}.$$

La dernière égalité résulte de $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ell) = \ell$. Comme $]u_n, \ell[\subset I$ on sait que $|f'(c)| \leq \lambda < 1$. D'où

$$\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \leq \lambda. \qquad (*)$$

Comme $\lambda < 1$, on obtient $|v_{n+1}| < |v_n|$, ce qui implique que $u_{n+1} \in I$.

En itérant l'inégalité $(*)$, on trouve

$$|v_{n+1}| \leq \lambda |v_n| \leq \lambda^2 |v_{n-1}| \leq \cdots \leq \lambda^{n+1} |v_0|.$$

Comme $0 \leq \lambda < 1$, la suite (λ^n) tend vers 0. Par conséquent la suite (v_n) tend aussi vers 0. ∎

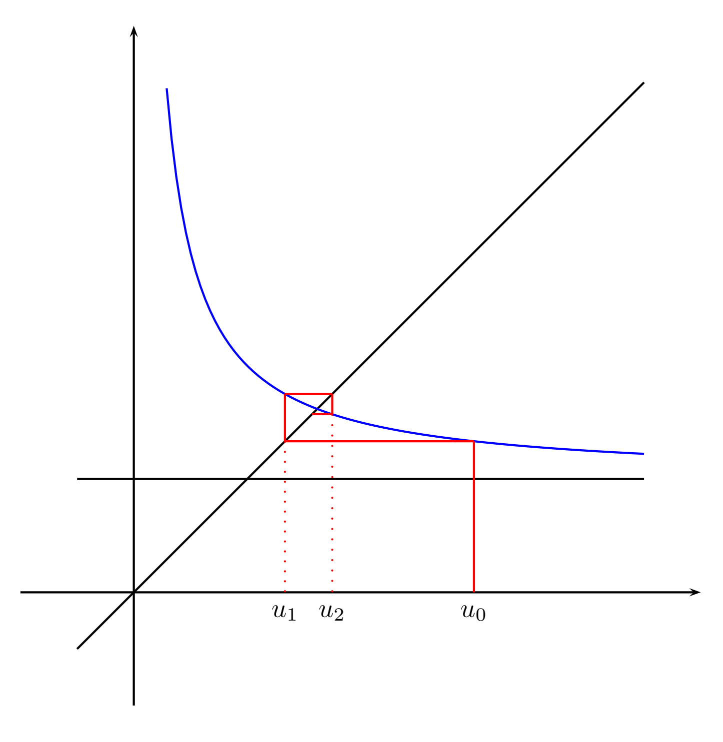
Remarque.

Si de plus la fonction dérivée f' est continue, alors la condition $|f'(\ell)| < 1$ implique l'existence d'un intervalle $I = [\ell - a, \ell + a]$ tel que pour tout $x \in I$ on a $|f'(x)| \leq \lambda < 1$.

Exemple.

Prenons $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Soit $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, c'est-à-dire le réel positif satisfaisant l'équation $\ell^2 = \ell + 1$, qui est équivalente à $\ell = f(\ell)$. Donc l est un point fixe.

On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $|f'(x)| < 1$ pour $x > 1$. Ainsi on peut prendre comme intervalle $I = [\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}]$. Le théorème du point fixe implique alors que la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ converge vers ℓ.



4.7 Exercices

Exercice 4.1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Pour chacune d'elles, écrire une démonstration ou bien trouver un contre-exemple.

1. Si $f\ :]0,+\infty[\to\ \mathbb{R}$ est une fonction strictement décroissante alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors il existe un réel $m > 0$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in [a,b]$ ou bien $f(x) \leq -m$ pour tout $x \in [a,b]$.
3. Il n'existe pas d'application continue bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
4. Il n'existe pas d'application continue surjective de de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
5. La fonction
$$x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$$
définit une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.
6. Il existe une application continue bijective de $[0,1[$ sur $]0,1]$.

Exercice 4.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^5 - 5x + 1$. Étudier les variations de f et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 4.3. Montrer que l'équation
$$x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$$
admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.4. Soit $f : [0,\pi/2[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \tan x - x$.

1. Étudier les variations de f
2. Montrer que f définit une bijection de $[0,\pi/2[$ sur $[0,+\infty[$.
3. Soit n un entier positif ou nul. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in [0,\pi/2[$ tel que $\tan x_n = x_n + n$.
4. Calculer la limite de la suite (x_n).

Exercice 4.5. Montrer que la fonction
$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$
est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

Exercice 4.6. Étudier les extremums de la fonction f définie par
$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$$
où n est un nombre naturel.

Exercice 4.7. Étudier les suites (u_n) qui vérifient pour tout $n > 0$
$$u_n = \frac{1}{4 + u_{n-1}}$$

Exercice 4.8. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1 : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \geq 1$ par $f_1(x) = (x^2+1)\sqrt{x^3-1}$,
2. $f_2 : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x > 0$ par $f_2(x) = \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{x}+1}$,
3. $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f_3(x) = \sqrt{\cos^2(x)+1}$,
4. $f_4 :]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $-\pi/2 < x < \pi/2$ par
$$f_4(x) = \frac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x,$$
5. $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f_5(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Exercice 4.9. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par
$$f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1.$$

1. Montrer que f_n est strictement croissante et qu'il existe un unique réel $x_n \in [0, 1/2[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. En déduire que la suite (x_n) est convergente.
3. Montrer que la suite (x_n^n) tend vers 0. En déduire la limite de (x_n).

Exercice 4.10. Étudier la continuité, la dérivabilité et la continuité de la dérivée pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x) = x|x|$.
2. $$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{si } \ x \neq 0, \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$
3. $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } \ x \neq 0, \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

Exercice 4.11. Soit f une fonction réelle non négative et la fonction F définie par
$$F(x) = Cf^2(x)$$
où C est une constante telle que $C > 0$. Montrer que F et f ont les mêmes points d'extremum.

Exercice 4.12. Montrer

1. $3x < 2\sin x + \tan x \quad$ pour $\ x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,
2. $\sin^2 x \leq \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x), \quad$ pour $\ x \in [0, \pi]$,
3. $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x \quad$ pour $\ x \in]-1, +\infty[$.

Exercice 4.13. Pour $n \geq 2$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x - \cos\dfrac{x}{n}$.

1. Montrer que f_n est strictement croissante ; en déduire qu'il existe un unique réel x_n tel que $x_n = \cos \frac{x_n}{n}$. Montrer que $x_n \in]0,1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a $\cos \frac{x}{n} < \cos \frac{x}{n+1}$. En déduire que la suite (x_n) est strictement croissante.
3. Montrer que (x_n) converge vers 1.

Exercice 4.14. Soit $f :]0,+\infty[$ la fonction définie par $f(x) = 2x \ln x - x + 1$.

1. Étudier les variations de f.
2. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a 2 solutions et que la plus petite est dans l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 4.15. Trouvez des intervalles sur lesquels $f(x) = x^3 - 3x + 1$ a une racine et une seule.

Exercice 4.16. Soit $f(x) = 2(x^2 - x - 1)^4 - x^2 + x$. Calculer et factorisrz $f'(x)$ sans développer f. En déduire le signe de f'. Trouver des intervalles sur lesquels $f(x) = 0$ a une racine et une seule.

Exercice 4.17. On pose

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Calculer $P_n'(x)$. Étudier l'équation $P_n(x) = 0$ pour $n \leq 4$. En déduire une hypothèse de récurrence pour les racines de $P_n(x) = 0$. Conclusion.

Exercice 4.18. Étudier l'équation $\sin x = \ln x$. On pourra étudier $f(x) = \sin x - \ln x$ sur les intervalles $]0,1]$, $[1,\pi/2]$, $[pi/2,e]$, $[e,+\infty$.

Exercice 4.19. Etudier l'équation $\cos x = \ln x$. Donner un encadrement de la (des) solution(s).

Exercice 4.20. Discuter suivant λ les solutions de $\cos 3x + 1 - 3\lambda \cos x = 0$.

Exercice 4.21. Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$, et telle que

$$f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Montrez qu'il existe au moins un réel $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 4.22. Peut-on appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes ? Le cas échéant, calculer le point c tel que $f'(c) = 0$.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ sur $[-1,3]$,
2. $f(x) = x^3 - x$ sur $[0,1]$,
3. $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-1}$ sur $[-2,3]$.

Exercice 4.23. Soit

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h),$$

où $0 < \theta < 1$. Soit $f^{(n+1)} \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{h\to 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 4.24. Soit $f(x) = \cos x$.
1) Montrer que f admet un unique point fixe noté ℓ dans $[0, 1]$.
2) Montrer qu'il existe $\lambda < 1$ tel que

$$\forall x \in \left[\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leq \lambda$$

3) Soit $u_0 \in [\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}]$, on construit la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
4)Que se passe-t-il si $u_0 = 0$?

Exercice 4.25. Soit P un polynôme de degré impair, à coefficients réels. Démontrer que P admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.26. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

On considèrera la fonction $g = \ln(f)$.

Exercice 4.27. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction deux fois dérivable sur $]a, b[$. Montrer

$$\forall \alpha \in]a, b[\qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha + h) + f(\alpha - h) - 2f(\alpha)}{h^2} = f''(\alpha).$$

Exercice 4.28. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

0) Mentionner pourquoi f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et tracer la fonction. f est-elle continue en 0 ?
1) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right),$$

où P_n est un polynôme.
3) En déduire que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 5

Développements limités

5.1 Comparaison de fonctions

On commence par définir les notions permettant de comparer deux fonctions, qui sont analogues à celles introduites pour les suites (définition 3.4.1).

Définition 5.1.1 (équivalent, négligeable, dominé)
Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in A$ et I un intervalle ouvert contenant a et contenu dans A. On suppose que $g(x) \neq 0$ si $x \in I \setminus \{a\}$. On dit que f est

- dominée *par g au voisinage de a si la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} O(g)$ (grand O).*
- négligeable *devant g au voisinage de a si la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers a. On note $f \underset{a}{=} o(g)$ (petit o).*
- équivalente *à g au voisinage de a si la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 quand x tend vers a. On note $f \underset{a}{\sim} g$.*

5.2 Formules de Taylor

Le but de ce chapitre est de montrer le théorème de Taylor-Young qui permet d'approcher des fonctions quelconques par des fonctions polynômiales et de "contrôler" le terme d'erreur.

Définition 5.2.1 (fonction de classe C^n)
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle ou plus généralement une union d'intervalles. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on définit $C^n(A)$ comme l'ensemble des fonctions $f : A \to \mathbb{R}$ tel que f peut être dérivée n fois et sa dérivée n-ième, notée $f^{(n)}$, est continue.

Remarques.

1. $C^0(A)$ est l'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbb{R}$.
2. On a une suite d'inclusions strictes
$$C^{n+1}(A) \subset C^n(A) \subset \cdots \subset C^1(A) \subset C^0(A).$$
3. Si $f \in C^n(A)$ on dit que f est de classe C^n.

4. On note $C^\infty(A)$ l'intersection des $C^n(A)$ pour $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $C^\infty(A)$ est l'ensemble des fonctions $f : A \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées de tout ordre. On dit qu'elles sont de classe C^∞.

Théorème 5.2.1 (formule de Taylor-Lagrange) *Soient $f \in C^{n+1}(I)$ et $a, b \in I$ avec $a < b$ et $[a, b] \subset I$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Remarque.

Si $n = 0$ on retrouve le théorème des accroissements finis (théorème 4.5.2).

Démonstration. On définit A par l'égalité

$$f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \cdots - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}A.$$

Comme dans la démonstration du théorème des accroissements finis, on introduit une fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1})}{(n+1)!}A.$$

Comme $f \in C^{n+1}(I)$, on a $f^{(n)} \in C^1(I)$, donc $\varphi \in C^1(I)$. Le choix de A donne $\varphi(a) = 0$ et on a aussi $\varphi(b) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle (théorème 4.5.1) : il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Calculons la dérivée de φ.

termes de φ	dérivée
$f(b)$	0
$-f(x)$	$-f'(x)$
$-(b-x)f'(x)$	$+f'(x) - (b-x)f''(x)$
$\vdots$	$\vdots$
$-\frac{(b-x)^p}{p!}f^{(p)}(x)$	$+\frac{(b-x)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(x) - \frac{(b-x)^p}{p!}f^{(p+1)}(x)$
$-\frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(x)$	$+\frac{(b-x)^p}{p!}f^{(p+1)}(x) - \frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+2)}(x)$
$\vdots$	$\vdots$
$-\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)$	$+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)$
$-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A$	$+\frac{(b-x)^n}{n!}A$

Dans la colonne de droite tous les termes sauf deux se simplifient, il reste

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}(A - f^{(n+1)}(x)).$$

Comme $c \neq b$, l'égalité $\varphi'(c) = 0$ donne $f^{(n+1)}(c) = A$. On a donc obtenu la formule de Taylor. ∎

Application.

Prenons $f(x) = \cos x$. Alors f est dans $C^\infty(\mathbb{R})$, donc dans $C^7(\mathbb{R})$.

Écrivons la formule de Taylor au point $a = 0$ pour $n = 6$. On pose $b = x > 0$. Les dérivées de f sont :

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= -\sin x = f^{(5)}(x),\\
f^{(2)}(x) &= -\cos x = f^{(6)}(x),\\
f^{(3)}(x) &= +\sin x = f^{(7)}(x),\\
f^{(4)}(x) &= +\cos x.
\end{aligned}$$

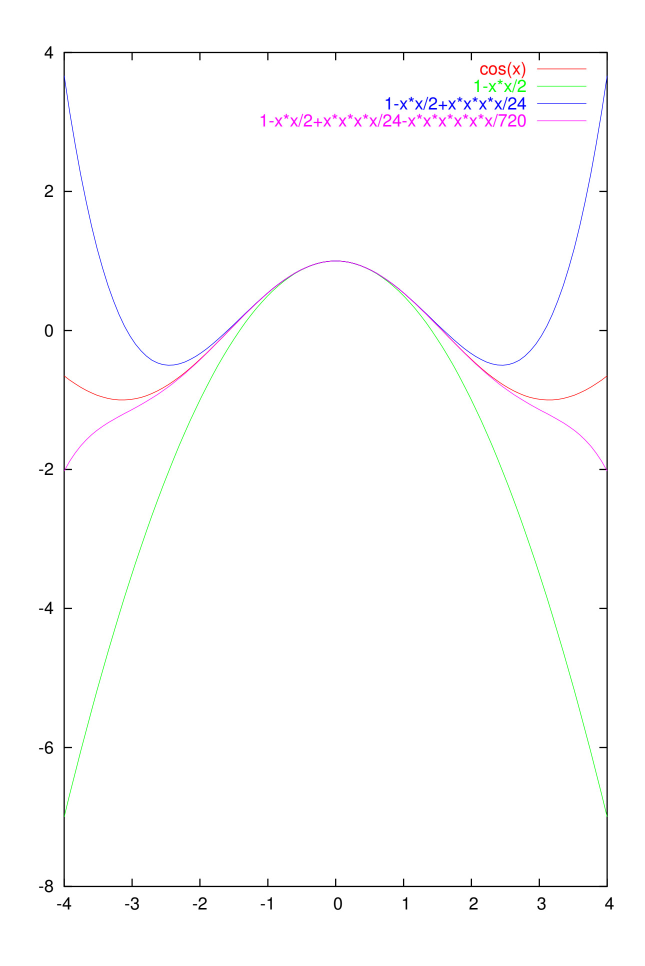
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + f^{(7)}(c)\frac{x^7}{7!}.$$

Si on suppose que $x \in [0, \pi]$ on a $f^{(7)} = \sin t \geq 0$ pour tout $t \in [0, \pi]$. On en déduit que pour tout $x \in [0, \pi]$

$$\cos x \geq 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6.$$

Les graphes de la fonction cosinus et de ses développements limités en 0 d'ordre 3, 5 et 7 :



Définition 5.2.2 (développement limité)
Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$. On dit que f admet un développement limité *d'ordre n au voisinage de a s'il existe $n+1$ réels $b_0, b_1, \dots, b_n$ tels que pour tout $x \in A$*

$$\begin{cases} f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + r(x) \\ r(x) = o((x-a)^n) \end{cases}$$

Remarque.

1. Admettre un développement limité d'ordre 0 en a est équivalent à avoir une limite finie en a.
2. Un développement limité d'ordre n est unique, s'il existe.

Théorème 5.2.2 (formule de Taylor-Young) *Soient $f \in C^n(A)$ et $a \in A$. Alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n).$$

Démonstration. On a $f \in C^n(A) = C^{(n-1)+1}(A)$. On peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ à f avec x à la place de b. On suppose ici que $x > a$.

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c),$$

avec $c \in]a, x[$. Écrivons le dernier terme sous la forme

$$\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(c) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\frac{(x-a)^n}{n!}(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)) = o((x-a)^n)$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{x \to a}(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)) = 0.$$

Cela résulte de la continuité de $f^{(n)}$ au point a. ∎

Application.

1. Trouver le développement limité d'ordre n en 0 de $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Il suffit de calculer les dérivées successives. On a

$$f^k(x) = k!(1-x)^{-1-k}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

donc $f^k(0) = k!$ et

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

2. Trouver le développement limité d'ordre n en 0 de $f(x) = e^x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^{(k)}(x) = e^x$, donc $f^{(k)}(0) = 1$. D'où

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

5.3 Calcul de développements limités

Proposition 5.3.1 (somme et produit de développements limités) *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n en a alors $f+g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n en a. Plus précisément si*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k+o((x-a)^n)$$

et

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k+o((x-a)^n)$$

alors

$$(f+g)(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)(x-a)^k+o((x-a)^n)$$

et

$$(fg)(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)(x-a)^k+o((x-a)^n).$$

Démonstration. L'assertion concernant l'addition est évidente.

Pour le produit on multiplie les polynômes en $(x-a)$ venant de f et g en négligeant les termes de degré $> n$ qui sont des $o((x-a)^n)$. Pour calculer le produit des polynômes on commence par calculer le terme contant, puis le coefficient de $(x-a)$ puis celui de $(x-a)^2$,...

$$(fg)(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)(x-a)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)(x-a)^2+\cdots$$

∎

En pratique, on a un formulaire qui donne les développements limités des fonctions usuelles en 0 et on calcule le développement limité d'une fonction $f(x)$ au voisinage de a de la manière suivante.

1. On se ramène au point 0 par translation, c'est-à-dire en posant $x-a=u$, de sorte que u tend vers 0 quand x tend vers a. Ainsi le développement limité en 0 de la fonction

   $$g(u)=f(u+a)$$

   correspond au développement limité en a de la fonction f.
2. On utilise les formules donnant le développement limité d'une somme, d'un produit et d'une composée de fonctions usuelles.

Proposition 5.3.2 (composition de développements limités) *Soient f et g deux fonctions ayant des développements limités d'ordre n en 0. On suppose que $g(0)=0$. Alors $f\circ g$ a un développement d'ordre n en 0 qui s'obtient en remplaçant dans le développement de f la variable x par le développement de g et en négligeant les termes de degré $> n$.*

Exemple.

Calcul du développement limité de $e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3. On a

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3).$$

On a $\cos 0 = 1 \neq 0$. Mais on peut écrire $\cos x = 1 + u(x)$ avec $u(0) = 0$. Alors $e^{\cos x} = e^{1+u(x)} = ee^{u(x)}$. On a

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3).$$

Comme $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, u^2 va commencer par x^4 et on peut donc négliger toutes les puissances u^k pour $k \geq 2$. Finalement, il reste

$$e^{\cos x} = e(1 - \frac{x^2}{2}) + o(x^3).$$

Proposition 5.3.3 (développement limité de la fonction inverse) *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Si $g(0) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.*

Démonstration. Il suffit par la propriété multiplicative (proposition 5.3.1) des développements limités de montrer que $\frac{1}{g}$ a un développement limité à l'ordre n en 0. Écrivons le développement limité de g à l'ordre n en 0

$$g(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

avec $b_0 \neq 0$.Alors

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k + o(x^n)} = \frac{1}{b_0(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{b_0} x^k + o(x^n))} = \frac{1}{b_0}\frac{1}{1-u}$$

avec $u = -(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{b_0} x^k) + o(x^n)$.

On sait que (voir application 2 de la formule de Taylor-Young)

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n).$$

Par composition on a un développement limité d'ordre n de la fonction $\frac{1}{1-u}$. La proposition est donc démontrée. ∎

Exemple.

Calcul du développement limité de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 5.

On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Il suffit d'avoir le développement à l'ordre 5 de $\frac{1}{\cos x}$.

On a

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-u}$$

avec $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$.

On a aussi

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + o(u^5).$$

Comme le premier terme (par ordre croissant des puissances de x) du développement limité de u est en x^2, le premier terme du développement limité de u^2 est en x^4. Celui de u^4 est en x^6, donc négligeable à l'ordre 5, ainsi que celui de u^5. En d'autres mots $u^4 = o(x^5)$ et $u^5 = o(x^5)$.

Il reste donc

$$\frac{1}{1-u} = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \frac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).$$

En multipliant on obtient

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right)$$

et après simplification

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

5.4 Exercices

Exercice 5.1. 1) Ecrire les développements limités en $x = 0$ à l'ordre indiqué entre parenthèses des expressions suivantes :

$$\sin x \tan x \ (3), \quad \frac{x}{e^x - 1} \ (4), \quad e^{\cos x} \ (5), \quad \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \ (4)$$

2) Trouver lorsque x tend vers 0 les limites des expressions suivantes, si elles existent :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}, \quad \frac{a^x - b^x}{x} \ (a > 0, b > 0), \quad \frac{\sin(\alpha + x) - \sin(\alpha - x)}{\cos(\alpha + x) - \cos(\alpha - x)} \ (\alpha \neq 0)$$

3) Trouver la limite lorsque x tend vers 1 de

$$\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x - 1}$$

4) Prolonger par continuité en 0 la fonction

$$\begin{array}{rcl} f \ :]-\pi, \pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \end{array}$$

Exercice 5.2. Encore quelques développements limités
1) Donner un développement limité à l'ordre 5 en zéro des fonctions suivantes :
$f(x) = \log(1 + e^x), \quad g(x) = \log(1 + \sin x), \quad h(x) = \sqrt{1 + x^3}$
2) Donner un développement limité à l'ordre 5 de $x \mapsto \tan x$ en zéro :
• d'abord en utilisant la définition de tan, et les DL de sin et cos
• ensuite en utilisant la relation $(\tan)' = 1 + \tan^2$, en intégrant successivement l'équivalent :

$$\tan x \sim_{(x \to 0)} x$$

3) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(\cos x - 1) + \tan x - \sin x}{x^2 \sin x + \tan x - x}, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{1 + x^2} - \sqrt[4]{3 + x^2}}$$

Exercice 5.3. Trouver la limite : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{(1 - e^x)^2}$.

Chapitre 6

Fonctions classiques

6.1 Fonctions bijectives

Définition 6.1.1 *Soient A et B deux intervalles de $\mathbb{R}$ de longueur finie ou infinie. Soit $f : A \to B$ une fonction.*

On dit que f est

- injective *si pour tout $x_1, x_2 \in A$ l'égalité $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$. Autrement dit pour tout $y \in B$ l'équation $f(x) = y$ a* au plus *une solution.*
- surjective *si pour tout $y \in B$ il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit pour tout $y \in B$ l'équation $f(x) = y$ a* au moins *une solution.*
- bijective *si f est injective et surjective. Autrement dit pour tout $y \in B$ l'équation $f(x) = y$ a* exactement *une solution.*

Exemples.

1. La fonction $\sin : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ est surjective, mais n'est pas injective car $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$.
2. La fonction $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ définie par $f(x) = x^2$ est surjective, mais n'est pas injective car $f(-x) = f(x)$.
3. La fonction $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est bijective.
4. La fonction $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ est injective, mais n'est pas surjective.

Proposition 6.1.1 *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La fonction $f : I \to f(I)$ est bijective.*
2. *La fonction f est strictement monotone.*

Démonstration. Supposons f strictement croissante. Il suffit de montrer que f est injective. Soient $x_1 \neq x_2$, alors $x_1 < x_2$ par exemple. Donc $f(x_1) < f(x_2)$ et en particulier $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Nous admettons la réciproque. ∎

6.2 Logarithme et exponentielle

Définition 6.2.1 *Pour $x > 0$, on définit*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

On appelle la fonction ln le logarithme népérien.

On a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et par conséquent $\ln'(x) > 0$ pour $x > 0$. Donc d'après la proposition 4.5.1 la fonction *ln* est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. D'après la proposition 6.1.1 la fonction ln est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur son image $f(]0, +\infty[)$. Il reste à déterminer $\lim_{x\to 0} \ln(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \ln(x)$. On procède en deux étapes.

Proposition 6.2.1 *Pour tout $x, y \in]0, +\infty[$ on a l'égalité*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Démonstration. Fixons y et considérons la fonction $f(x) = \ln(xy)$. Par la formule (proposition 4.4.4) qui donne la dérivée d'une application composée on a

$$f'(x) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

On remarque que f et ln ont la même dérivée $\frac{1}{x}$. Donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) - \ln(x) = c$. En prenant $x = 1$ on trouve $c = \ln(y)$, car $\ln 1 = 0$. ∎

Proposition 6.2.2 *On a les limites*

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad et \qquad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty.$$

Démonstration. Montrons d'abord la première. On remarque que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc pour un entier $n \geq 1$

$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{n+1} \qquad \text{si } n \leq t \leq n+1. \qquad (*)$$

Soit $[x]$ la partie entière de x. En utilisant l'inégalité (*) et en décomposant l'intégrale on obtient

$$\begin{aligned} \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt &= \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{[x]-1}^{[x]} \frac{dt}{t} + \int_{[x]}^x \frac{dt}{t} \\ &\geq \int_1^2 \frac{dt}{2} + \int_2^3 \frac{dt}{3} + \cdots + \int_{[x]-1}^{[x]} \frac{dt}{[x]} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{[x]} \end{aligned}$$

Montrons que la suite

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

On écrit

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{8} \geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} \geq \frac{8}{16} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

On obtient ces inégalités en minorant les 2^{n-1} termes par le plus petit d'entre eux, c'est-à-dire $\frac{1}{2^n}$. Ainsi $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$.

Comme la suite u_n est strictement croissante, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Et comme $\ln(x) \geq u_{[x]}$ on obtient $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

En posant $y = \frac{1}{x}$ dans l'égalité $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, on obtient $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$. D'où $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$. ∎

On conclut que la fonction logarithme donne une bijection

$$\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}.$$

On définit l'exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ comme la fonction réciproque du logarithme népérien, c'est-à-dire $\exp(\ln x) = x$ et $\ln(\exp y) = y$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$.

Proposition 6.2.3 *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a l'égalité*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Démonstration. Comme ln est bijectif, il existe $u, v \in]0, +\infty[$ tels que $\ln u = x$ et $\ln v = y$. D'après la proposition 6.2.1 on sait que $\ln(uv) = \ln u + \ln v = x + y$. En prenant l'exponentielle des deux côtés on obtient $uv = \exp(\ln(uv)) = \exp(x + y)$. Or $u = \exp(\ln(u))$ et $v \exp(\ln(v))$. D'où la formule. ∎

Proposition 6.2.4 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Démonstration. On sait dériver une fonction réciproque (proposition 4.4.5). La formule donne ici avec $g = \exp$ et $f = \ln$

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

On pose $x = \ln a$, ce qui est équivalente à $a = \exp(x)$. Comme $f'(a) = \frac{1}{a}$, on obtient $g'(x) = \exp x$. ∎

6.3 Développements limités

Les fonctions $\exp(x)$ et $\ln(1 + x)$ ont des développements limités en 0 à l'ordre n qui sont donnés par :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

et

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Les fonctions $\exp(x)$ et $\ln(x)$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$ respectivement.

Remarques.

1. On montrera dans le cours d'analyse 2 que $\exp(x)$ est la limite des polynômes de degré n qui donnent les développements limités, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

2. En itérant la formule $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ avec $y = x$ on trouve

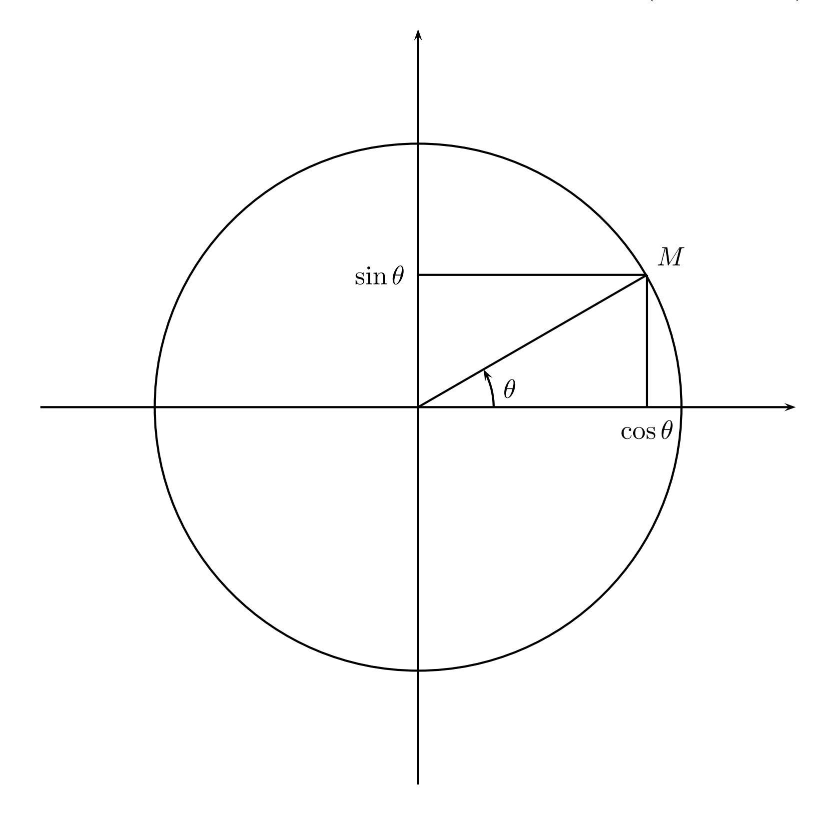
$$\exp(nx) = (\exp(x))^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit $a > 0$. En posant $x = \ln(a)$, on obtient $\exp(n \ln a) = [\exp(\ln a)]^n = a^n$, ce qui permet de définir les fonctions $g(x) = a^x$ par

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

6.4 Fonctions trigonométriques

On considère le cercle C de centre O et de rayon 1. Soit M un point de C. Si on appelle x l'angle de Ox avec $\overrightarrow{OM}$, les coordonnées cartésiennes de M sont $(\cos x, \sin x)$.



On donne quelques propriétés des fonctions sinus et cosinus.

1. Le théorème de Pythagore donne $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
2. Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.
3. Les fonctions sinus et cosinus sont de classe C^∞ et

$$\sin' = \cos \qquad \cos' = -\sin$$

4. Les fonctions $\sin : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ et $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ sont des bijections. Leurs fonctions réciproques sont appelées Arc sinus et Arc cosinus :

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \qquad \arccos : [-1,1] \to [0,\pi].$$

Par la proposition 4.4.5 donnant la dérivée de la fonction réciproque on obtient

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. On en déduit la relation pour tout $x \in [-1, 1]$

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

6. Si $z \in \mathbb{C}$, on montre dans la cours d'analyse 2 que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}\right)$$

existe. On définit $\exp z$ comme cette limite. On a la formule de Moivre

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Chapitre 7

Corrigé des exercices

Exercice 6.1. On a $u_n \sim (\frac{3}{a})^n$. Donc u_n tend vers 0 si $a < -3$ ou si $a > 3$. La suite u_n est constante pour $a = 3$. Si $0 < a < 3$, la suite tend vers $+\infty$. Si $-3 < a < 0$, la suite n'a pas de limite. La réponse est donc $a < -3$ ou $3 \leq a$.

Exercice 6.2. Un développement limité du numérateur en 0 à l'ordre 2 donne $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.Un développement limité de e^x en 0 à l'ordre 1 donne $1 - e^x \sim -x$. D'où

$$\frac{1 - \cos x}{(1 - e^x)^2} \sim \frac{1}{2}.$$

Exercice 6.3.

1. On a pour tout entier $n \geq 1$
$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}.$$
Donc $u_n^2 \leq u_{n+1}^2$ et puisque ces nombres sont positifs, on a $u_n \leq u_{n+1}$. La suite est croissante et $u_n \geq 1$ pour tout n.
2. Calculons
$$\left(u_n + \frac{1}{2^n}\right)^2 - u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{2^n}\right)^2 - \left(u_n^2 + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{2u_n}{2^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{2^n} = \frac{2u_n - 1}{2^n} + \frac{1}{4^n}.$$
Cette quantité est donc ≥ 0 puisque $u_n \geq 1$.
En itérant cette inégalité on obtient
$$u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{2^n} \leq u_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq u_{n-2} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq \cdots \leq u_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$
On a une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$: sa somme est
$$\frac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}}).$$
La suite (u_n) est donc majorée par 2.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente.
4. En itérant on obtient

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n} = u_{n-1}^2 + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = u_{n-2}^2 + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \cdots = u_1^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Ce dernier terme est égal à

$$\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

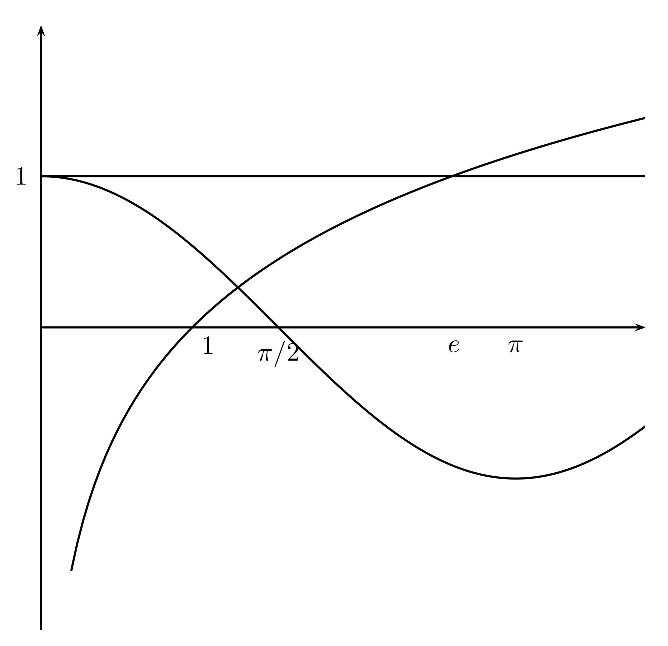
qui tend vers 2. Donc la suite (u_n^2) tend vers 2 et comme $u_n > 0$, la limite de la suite (u_n) est $\sqrt{2}$.

Exercice 6.4.

Le logarithme n'est défini que pour $x > 0$. Soit $f(x) = \ln x - \cos x$. Cette fonction est dérivable pour $x > 0$. On a $f'(x) = \frac{1}{x} + \sin x$. On sait que le logarithme est croissant, que $\ln e = 1$ et que $|\cos x| \leq 1$. On en déduit que $f(x) > 0$ pour $x > e$.

On sait que $2 < e < 3 < \pi$, donc $f'(x) > 0$ pour $0 < x \leq e$. On a aussi $f(1) < 0$.

On a $f(e) = 1 - \cos e > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires dit alors que f a un zéro et un seul entre 1 et e et même entre 1 et $\pi/2$ car $\cos x$ est négatif pour $\pi/2 \leq x \leq e$.



Exercice 6.5.

Si k est un entier tel que $1 \leq k \leq n$ on a par la croissance du logarithme : $0 = \ln 1 \leq \ln k \leq \ln n$. On en déduit que chaque terme de la somme vérifie :

$$\frac{1}{n + \ln n} \leq \frac{1}{n + \ln k} \leq \frac{1}{n}.$$

Comme u_n est la somme de n termes, on a

$$\frac{n}{n + \ln n} \leq u_n \leq \frac{n}{n} = 1.$$

On a

$$\frac{n}{n+\ln n} = \frac{1}{1+\frac{\ln n}{n}}$$

et on sait d'après le cours que $\frac{\ln n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc $\frac{n}{n+\ln n}$ a pour limite 1 et par le théorème des gendarmes la suite (u_n) converge et a pour limite 1.

Exercice 6.6.

1. $\sin x \tan x = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$. Or

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

donc

$$\sin^2 x = x^2 + o(x^3)$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

donc

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Finalement :

$$\sin x \tan x = x^2 + o(x^3).$$

2.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

donc

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} =$$

$$= 1 - (\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)) + (\dots)^2 - (\dots)^3 + (\dots)^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4).$$

3.

$$e - \frac{1}{2}ex^2 + \frac{1}{6}ex^4 + o(x^5)$$

4.

$$1 + 2x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{10}{3}x^4 + o(x^4)$$

Exercice 6.7.

1.

$$e^x - e^{-x} = 1 + x - (1 - x) + o(x) = 2x + o(x)$$
$$\sin x = x + o(x)$$

donc

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{2 + o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow{cv} 2.$$

2.
$$a^x - b^x = e^{xln(a)} - e^{xln(b)} = 1 + xln(a) - (1 + xln(b)) + o(x))$$

$$x(ln(a) - ln(b)) + o(x).$$

Donc

$$\frac{a^x - b^x}{x} = ln(a) - ln(b) + o(1) \xrightarrow{cv} ln(a) - ln(b).$$

3.
$$\sin(\alpha + x) = \sin\alpha + x\cos\alpha + o(x)$$
$$\sin(\alpha - x) = \sin\alpha - x\cos\alpha + o(x)$$
$$\cos(\alpha + x) = \cos\alpha - x\sin\alpha + o(x)$$
$$\cos(\alpha - x) = \cos\alpha + x\sin\alpha + o(x)$$

Donc

$$\frac{\sin(\alpha + x) - \sin(\alpha - x)}{\cos(\alpha + x) - \cos(\alpha - x)} = \frac{2x\cos\alpha + o(x)}{-2x\sin\alpha + o(x)} = \frac{\cos\alpha + o(1)}{-\sin\alpha + o(1)} \xrightarrow{cv} = -\text{cotan } \alpha.$$

Exercice 6.8.

Quand $x \xrightarrow{cv} 1$:

$$e^x + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

Donc

$$\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)} - \frac{1}{x-1} =$$
$$= \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{1 + (x-1) + o(x-1)} - 1\right] = \frac{1}{x-1}\left[-(x-1) - o(x-1)\right] =$$
$$= -1 - o(1) \xrightarrow{cv} -1.$$

Exercice 6.9.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

donc

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

et

$$\frac{2}{\sin^2 x} = \frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)}\right) = \frac{2}{x^2}(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3)).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

donc

$$\frac{1}{1-\cos x} = \frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{12}+o(x^3)}\right) = \frac{2}{x^2}(1+\frac{x^2}{12}+o(x^3)),$$

d'où

$$\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} = \frac{2}{x^2}[\frac{x^2}{4}+o(x^3)] = \frac{1}{2}+o(x) \xrightarrow{cv} \frac{1}{2}.$$